

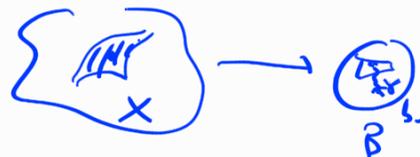
Retour sur le cup-produit en cohomologie tordue.

On se donne X un espace top. et $f: X \rightarrow B$ $b_0 \in B$

et Π un $\mathbb{Z}[\pi]$ -module $\pi = \pi_1(B, b_0)$

$$H^*(X, \Pi) = H^* \left(\text{Hom}_{\Pi} (C_*(X, B), \Pi) \right)$$

(σ, δ)



Si on a deux $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules Π et N

et $\varphi \in \text{Hom}_{\Pi} (C_p(X, B), \Pi)$ $\psi \in \text{Hom}_{\Pi} (C_q(X, B), N)$

On définit $\varphi \cup \psi \in \text{Hom}_{\Pi} (C_{p+q}(X, B), \Pi \otimes N)$

par la formule habituelle $\varphi \cup \psi (\sigma, \delta) = \varphi(\sigma|_{[0, \dots, p]}) \otimes \psi(\sigma|_{[p, \dots, p+q]})$

$\sigma: \Delta_{p+q} \rightarrow X$

Cette opération induit une application

$$H^p(X, \Pi) \times H^q(X, N) \rightarrow H^{p+q}(X, \Pi \otimes N)$$

on précise $\Pi \otimes N$ désigne le produit tensoriel usuel (pas celui sur $\mathbb{Z}[\pi]$) et il est un coin sur $\mathbb{Z}[\pi]$ -module par l'action diagonale

$$\alpha \cdot x \otimes y = \alpha x \otimes \alpha y.$$

En pratique on va souvent remplacer $\Pi \otimes N$ par un autre

système de coefficients P en posant $\Pi \otimes N \rightarrow P$

un morphisme de $\mathbb{Z}[\pi]$ -module.

Exemple principal. dans la suite spectrale cohomologique de Serre

$$*_1: E_1^{p,q} \times E_1^{p',q'} \rightarrow E_1^{p+p',q+q'}$$

est un produit vérifiant ...

$$\text{cela induit } *_2: E_2^{p,q} \times E_2^{p',q'} \rightarrow E_2^{p+p',q+q'}$$

$$\text{et on a vu que } E_2^{p,q} \cong H^p(B, H^q(F))$$

$$\text{On a } *_2: H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \rightarrow H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$$

Proposition: $*_2 = (-1)^q P'$ double cup-product.

double cup: $H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \rightarrow H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$

on a aussi $H^1(F) \times H^{q'}(F) \rightarrow H^{1+q'}(F)$ cup-product / fib.

induit un morph. de $\mathbb{Z}[\pi]$ -mod. $H^q(F) \otimes H^{q'}(F) \rightarrow H^{q+q'}(F)$

donc $H^p(B, H^q(F)) \times H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \rightarrow H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$

En pratique on se servira presque uniquement des cas $p=0$ ou $q=0$

Exemple: $S^1 \hookrightarrow S^0$
 \downarrow
 $P^\infty(\mathbb{C})$

La suite sp. de Serre a un terme $E_2^{p,q} = H^p(P^\infty(\mathbb{C}), H^q(S^1))$

$H^0(S^1) \simeq \mathbb{Z}$
 \uparrow
 1

$H^1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$
 \uparrow
 x deg 1
générateur

$H^*(S^1) = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$
 $\simeq \bigoplus_{p=0}^1 H^p(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x$

ou

$q=1$	$H^0(P^\infty) \times H^1(P^\infty)$	$H^2(P^\infty) \times H^3(P^\infty)$		
$q=0$	$H^0(P^\infty)$	$H^1(P^\infty)$	$H^2(P^\infty)$	$H^3(P^\infty)$
E_2	1	$(1,0)$		0

d_2 arrows from $(1,0)$ to 0 and 0 to 0 .

$E_2^{p,1} = H^p(P^\infty, H^1(S^1)) = H^p(P^\infty) \otimes H^1(S^1)$

$E_2^{p,0} \xrightarrow{x} E_2^{p,1}$

est un isomorphisme.

$H^p(P^\infty, H^0(S^1)) \rightarrow H^p(P^\infty, H^1(S^1))$

$\mathbb{Z}x$	0	$\mathbb{Z}x$	0	$\mathbb{Z}x^2$	0	$\mathbb{Z}x^3$	0
\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}x$	0	$\mathbb{Z}x^2$	0	$\mathbb{Z}x^3$	0

d_2 arrows: $\mathbb{Z}x \rightarrow 0$, $\mathbb{Z}x \rightarrow \mathbb{Z}x^2$, $\mathbb{Z}x^2 \rightarrow 0$.

$\alpha = d_2 x$

$d_2(\alpha x) = d_2 \alpha x + \alpha d_2 x$

$= \alpha d_2 x = \alpha^2$ ($d_2 \alpha = 0$)

On trouve au final

$H^*(P^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]$ deg $\alpha = 2$.

Groupes SU_n : $H_+(SU_n, \mathbb{Z}) = H_+(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}, \mathbb{Z})$

On a déduit cela de la suite spect. homologique.

Démontrons que $H^*(SU_n, \mathbb{Z}) = H^*(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}, \mathbb{Z})$.

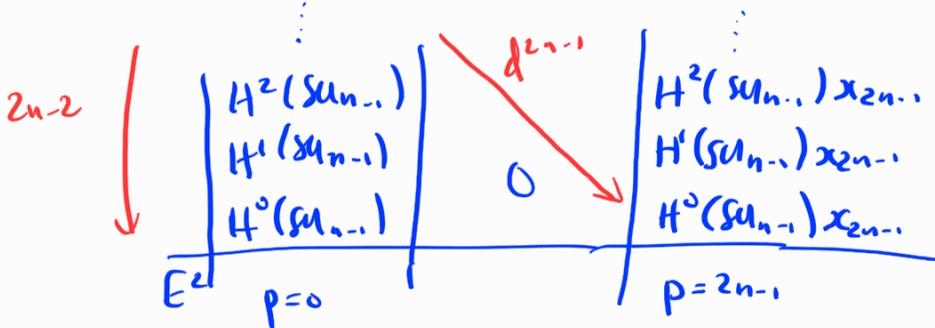
Par récurrence sur n : pour $n=2$ $SU_2 \cong S^3$.

On regarde la fibration $SU_{n-1} \hookrightarrow SU_n \xrightarrow{\downarrow} S^{2n-1}$

La 2^{ème} page de la suite spectrale cohomologique de Lem \hookleftarrow

$$E_{p,q}^2 = H^p(S^{2n-1}, H^q(SU_{n-1})) \quad n \geq 2 \quad \pi_1(S^{2n-1}) = 1$$

$$= H^p(S^{2n-1}) \otimes H^q(SU_{n-1}) \quad \text{par les coeff. universels}$$



$x_n \in H^n(S^n, \mathbb{Z})$ le générateur

Rappelons nous que d^{2n-1} est une dérivation $d^{2n-1}(\alpha \beta) = d^{2n-1}\alpha \cdot \beta + (-1)^{|d|} \alpha \cdot d^{2n-1}\beta$

Par hypothèse de récurrence $H^*(SU_{n-1})$ est engendrée par des classes de degré $3, 5, \dots, 2n-3$.

$$x_3 \dots x_{2n-3} \quad d^{2n-1}(x_i) = 0$$

x_i est de degré i $d^{2n-1}x_i$ est de degré $i - (2n-2) < 0$
 donc $d^{2n-1}(x_i) = 0 \quad \forall i$ donc $d^{2n-1} = 0$

$$\Rightarrow E^2 = E^3 = \dots = E^\infty$$

$$\text{donc } H^*(SU_n) \cong H^*(SU_{n-1}) \oplus H^*(SU_{n-1})x_{2n-1}$$

$$= H^*(SU_{n-1}) \otimes \left(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x_{2n-1} \right) / (x_{2n-1}^2)$$

$$= \mathbb{Z}[x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}] / (x_3^2, x_5^2, \dots, x_{2n-1}^2)$$

$$= H^*(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}, \mathbb{Z})$$

Exemple: $M_9 \quad \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Rq: $\pi_3(S^2) \xrightarrow{\text{suspension}} \pi_4(S^3)$
 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$P^{\infty}(\mathbb{C})$
 \cong
 $K(\mathbb{Z}, 2)$

Exercice (devoir à la maison)

$K(\mathbb{Z}, 3)$	$\pi_3 = \mathbb{Z}$	$\pi_2 = 0$	$\forall k \neq 3$	$\cong K(\mathbb{Z}, 3) \times P K(\mathbb{Z}, 3)$
$H^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ 0 \ 0 \ \mathbb{Z} \ 0 \ 0 \ \mathbb{Z}/2$				\downarrow $K(\mathbb{Z}, 3)$
$\text{deg} \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$				13
				max

On part de S^3 on veut calculer $\pi = \pi_4(S^3)$

En ajoutant des cellules de dim 6 et plus, on crée un espace Y qui vérifie $\pi_* Y = 0 \ 0 \ \mathbb{Z} \ \pi \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$
 $\text{deg} \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \dots$

On observe aussi que l'homologie de Y est la même que celle de S^3 jusqu'en degré 5 inclus. $H_4(Y) = H_5(Y) = 0$.

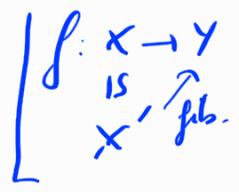
En particulier $H^3(Y, \mathbb{Z}) \cong H^3(S^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
 $\cong [Y, K(\mathbb{Z}, 3)]$

Au générateur de $H^3(Y, \mathbb{Z})$ correspond une application $f: Y \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$ qu'il faut à changer Y en un espace qui lui est homotope on peut supposer que Y est une fibration. On note la fibre F .

$\pi_5(Y) \rightarrow \pi_5(K(\mathbb{Z}, 3)) \rightarrow \pi_4(F) + \pi_4(Y) \rightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}, 3)) \rightarrow \pi_3(F) \rightarrow \pi_3(Y) \rightarrow \pi_3(K(\mathbb{Z}, 3)) \rightarrow$
 $0 \quad 0 \quad \pi_4(F) \cong \pi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

La suite ex. longue donne $\pi_k(F) = \pi \quad \pi_k(F) = 0 \ \forall k \neq 4$.
 ie $F = K(\pi, 4)$.

$K(\pi, 4) \rightarrow Y$
 \downarrow
 $K(\mathbb{Z}, 3)$



On regarde la suite spectrale en homologie.

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

$$H_*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

par les coeffs. universels

$$E_{p,q}^2 = H_p(K(\mathbb{Z}, 3), H_q(K(\pi, 4)))$$

pas de coeffs. tendus.

$q=4$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	$?$
$q=3$	0	0	0	0	0	0
$q=2$	0	0	0	0	0	0
$q=1$	0	0	0	0	0	0
$q=0$	\mathbb{Z}	0	0	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}/2$
	$p=0$			$p=3$		$p=5$

$$H_*(K(\pi, 4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

par Hurewicz.

$$H_*(K(\mathbb{Z}, 3), \pi)$$

Cette suite doit converger vers $H_*(Y)$

$$H_*(Y) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$$

Comme $H_4(Y) = 0$ le groupe $E_{0,4}^2$ doit disparaître dans $E_{0,4}^\infty$.
La seule façon que cela arrive est que ∂_5 soit surjective.

$$E^6$$

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
\mathbb{Z}	0	0	\mathbb{Z}	0	$\text{Ker } \partial_5$

$\text{Ker } \partial_5$ contribue à $H_5(Y)$ qui est nul.

ou $\partial_4, \partial_7, \dots$ sont nuls sur $E_{0,5}^6$.

donc $\text{Ker } \partial_5 = 0$ Finalement:

$$\partial_5: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi$$

est un isomorphisme.

$$\pi = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

3.5 Classes caractéristiques

On va considérer trois types de fibrés vectoriels sur une base B

(1) Fibré vectoriel réel de dim k .

① Fibré vectoriel réel orienté de dim k

② Fibré vectoriel complexe de dim k

Exemples universels ① $G_k(\mathbb{R}^n) = \{ P \subset \mathbb{R}^n \mid P \text{ sous-espace vectoriel de dim } k \}$

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{ (v, P) \mid v \in P, P \in G_k(\mathbb{R}^n) \}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ G_k(\mathbb{R}^n) & P & \end{array} \quad \text{est un fibré vectoriel de dim } k \text{ sur } G_k(\mathbb{R}^n).$$

Il y a des inclusions $G_k(\mathbb{R}^n) \subset G_k(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_k(\mathbb{R}^{n+2}) \dots$

$$\text{on pose } G_k = \varinjlim_n G_k(\mathbb{R}^n) \quad E_k \text{ fibré de } G_k.$$

$$G_k^+ = \varinjlim_n G_k^+(\mathbb{R}^n) = \{ (P, o) \mid P \subset \mathbb{R}^n \text{ dim } P = k, o \text{ orientation de } P \}$$

$$\begin{array}{c} E_k^+ \\ \downarrow \\ G_k^+ \end{array}$$

$$G_k^{\mathbb{C}} = \varinjlim_n G_k^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \{ P \subset \mathbb{C}^n \text{ dim } P = k \}$$

$$\begin{array}{c} E_k^{\mathbb{C}} \\ \downarrow \\ G_k^{\mathbb{C}} \end{array}$$

Théorème: Soit B un espace paracompact et $p: E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel de dim k . Alors $\exists \xi: B \rightarrow G_k$
tq $E \simeq \xi^* E_k$. De plus ξ est unique à homotopie près.
Même chose pour G_k^+ et $G_k^{\mathbb{C}}$.

Déf: Une classe caractéristique est un élément $x \in H^*(G_k, \mathbb{Z})$

Si $p: E \rightarrow B$ fibré de dim k alors $E \simeq \xi^* E_k$

on associe à p la classe $\xi^*(x) \in H^*(B, \mathbb{Z})$.

On obtient une classe de cohomologie qui ne dépend que du fibré E .
dite caractéristique naturelle par rapport aux pull-back.

Ex: classes de Stiefel-Whitney, classes de Chern, classes de Pontryagin.

Regardons la cohomologie de $G_k^{\mathbb{C}}$

$$G_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^{\infty}(\mathbb{C})$$

$$H^*(\mathbb{P}^{\infty}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha] \quad \text{deg } \alpha = 2$$

$\alpha = c_1$ première classe de Chern.

Théorème, $k \geq 1$ $H^*(G_k, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_k]$ où $\text{deg } c_i = 2i$

On munit $\mathbb{C}^{(\infty)}$ d'une structure hermitienne standard.

On pose $U_k^{\mathbb{C}} = \{ (v, V) \text{ avec } V \in G_k^{\mathbb{C}} \text{ et } \|v\|=1 \}$.

L'application $U_k^{\mathbb{C}} \rightarrow S^{\infty}$
 $(v, V) \mapsto v$

La fibre de cette application est $\{ V \subset \mathbb{C}^{(\infty)} \text{ dim } V = k \text{ et } v \in V \}$
 $\{ W \subset \mathbb{C}^{(\infty)} / \mathbb{C}v \text{ dim } W = k-1 \}$.

fibrer $G_{k-1}^{\mathbb{C}} \rightarrow U_k^{\mathbb{C}}$
 \downarrow
 S^{∞}

$$\Rightarrow G_{k-1}^{\mathbb{C}} \simeq U_k^{\mathbb{C}}$$

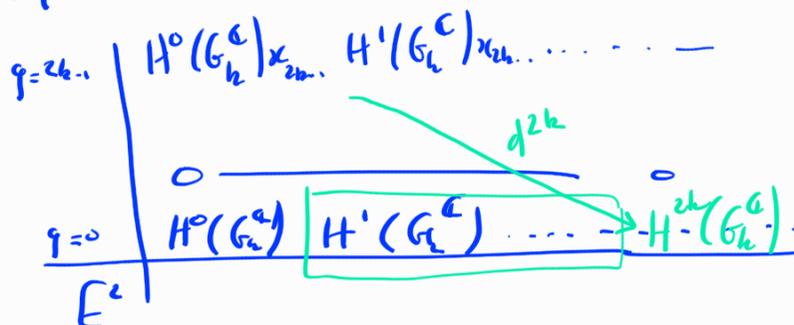
On regarde l'autre projection $U_k^{\mathbb{C}} \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$
 $(v, V) \mapsto V$

sa fibre est $\{ v \in V \} = S^{2k-1}$.

On a donc une fibration $S^{2k-1} \hookrightarrow G_{k-1}^{\mathbb{C}}$
 \downarrow
 $G_k^{\mathbb{C}}$

La preuve consiste à faire un recouvrement et utiliser la suite spectrale cohomologique de Serre.

$$E_{p,q}^2 = H^p(G_k^{\mathbb{C}}, H^q(S^{2k-1})) \quad (\pi_1 G_k^{\mathbb{C}} = 0)$$



x_{2k-1} le germe de $H^{2k-1}(S^{2k-1})$

Seule d^{2k} peut être non triviale.

On a un isomorphisme $H^l(G_k^{\mathbb{C}}) \simeq H^l(G_{k-1}^{\mathbb{C}}) \quad \forall l \leq 2k-1$

Comme d^{2k} est une dérivation, toute la différentielle est déterminée par $d^{2k}(x_{2k-1}) \in H^{2k}(G_k^{\mathbb{C}})$

$\subset \mathbb{C}x_{2k}$

La diff. $d^{2k} : H^k(G_k^{\mathbb{C}}) \rightarrow H^k(G_k^{\mathbb{C}})$

et en fait la multiplication par $c_k \in H^{2k}(G_k^{\mathbb{C}})$

il faut analyser la suite $\rightarrow \times c_k$ et une injection

$$\text{et } H^*(G_k^{\mathbb{C}}) / (c_k) \cong H^*(G_{k-1}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{k-1}]$$

$$\Rightarrow H^*(G_k^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k].$$

- Milnor-Stasheff Clases - caractéristiques
- Hatcher Vector bundles and K-theory.

