

La dernière fois on a construit l'homologie bordure

$$f: X \rightarrow B \quad b_0 \in B \quad H = H_1(B, b_0) \quad \text{un } \mathbb{Z}[H]\text{-module}$$

chains $\tau: \Delta_n \rightarrow X \quad \gamma: [0, 1] \rightarrow B \quad \gamma(0) = b_0, \gamma(1) = f(\sigma(\gamma)) \quad m \in \mathbb{N}$

$$([\tau, [\gamma]] \otimes m) \sim ([\tau, [\gamma_\beta]] \otimes \alpha m)$$

Apparté. Si X est une variété diff. cohologique de De Rham (des formes différentielles sur Ω).

le système de coefficients H peut être pensé dans ce contexte comme un fibré vertl. $E \rightarrow X$ de dim finie avec connexion plate D (ou avec transition loc constantes).

L'holonomie de ce fibré le long d'un chemin donne une map $p: \pi_1(X, x_0) \rightarrow GL(E_{x_0}) \quad E_{x_0} = p^{-1}(x_0)$.

$\Rightarrow E_{x_0}$ est un $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ -module

On peut considérer $\Omega^*(X, E) = \begin{cases} \text{formes diff. sur } X \text{ à valeur} \\ \text{dans } E. \end{cases}$
(sections de $i^*T^*X \otimes E$)

il existe d'une diff. $d: \Omega^k(X, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(X, E)$
(la diff. normale dans le sens de E)

On a encore un iso $H^*(X, E) \simeq H_{DR}^*(X, E)$.

On va voir comment calculer ces groupes à partir d'une décomposition cellulaire.

Exemple: $X = S'$ $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module est un groupe abélien \mathbb{Z} avec un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z})$.

Calculons $H_*(S', \mathbb{Z})$ et $H^*(S', \mathbb{Z})$

On se ramène ici à calculer $H_*(C_*^{\text{cell}}(S', \mathbb{Z}))$

On a $C_*^{\text{cell}}(S', S')$ est le \mathbb{Z} -module libre engendré par les cellules manquées les relevés des cellules à \widetilde{S}'

<img alt="Diagram showing a horizontal line with points e_0, t_0, e_1, t_1, e_2, t_2, e_3, t_3, e_4, t_4, e_5, t_5, e_6, t_6, e_7, t_7, e_8, t_8, e_9, t_9, e_10, t_10, e_11, t_11, e_12, t_12, e_13, t_13, e_14, t_14, e_15, t_15, e_16, t_16, e_17, t_17, e_18, t_18, e_19, t_19, e_20, t_20, e_21, t_21, e_22, t_22, e_23, t_23, e_24, t_24, e_25, t_25, e_26, t_26, e_27, t_27, e_28, t_28, e_29, t_29, e_30, t_30, e_31, t_31, e_32, t_32, e_33, t_33, e_34, t_34, e_35, t_35, e_36, t_36, e_37, t_37, e_38, t_38, e_39, t_39, e_40, t_40, e_41, t_41, e_42, t_42, e_43, t_43, e_44, t_44, e_45, t_45, e_46, t_46, e_47, t_47, e_48, t_48, e_49, t_49, e_50, t_50, e_51, t_51, e_52, t_52, e_53, t_53, e_54, t_54, e_55, t_55, e_56, t_56, e_57, t_57, e_58, t_58, e_59, t_59, e_60, t_60, e_61, t_61, e_62, t_62, e_63, t_63, e_64, t_64, e_65, t_65, e_66, t_66, e_67, t_67, e_68, t_68, e_69, t_69, e_70, t_70, e_71, t_71, e_72, t_72, e_73, t_73, e_74, t_74, e_75, t_75, e_76, t_76, e_77, t_77, e_78, t_78, e_79, t_79, e_80, t_80, e_81, t_81, e_82, t_82, e_83, t_83, e_84, t_84, e_85, t_85, e_86, t_86, e_87, t_87, e_88, t_88, e_89, t_89, e_90, t_90, e_91, t_91, e_92, t_92, e_93, t_93, e_94, t_94, e_95, t_95, e_96, t_96, e_97, t_97, e_98, t_98, e_99, t_99, e_100, t_100, e_101, t_101, e_102, t_102, e_103, t_103, e_104, t_104, e_105, t_105, e_106, t_106, e_107, t_107, e_108, t_108, e_109, t_109, e_110, t_110, e_111, t_111, e_112, t_112, e_113, t_113, e_114, t_114, e_115, t_115, e_116, t_116, e_117, t_117, e_118, t_118, e_119, t_119, e_120, t_120, e_121, t_121, e_122, t_122, e_123, t_123, e_124, t_124, e_125, t_125, e_126, t_126, e_127, t_127, e_128, t_128, e_129, t_129, e_130, t_130, e_131, t_131, e_132, t_132, e_133, t_133, e_134, t_134, e_135, t_135, e_136, t_136, e_137, t_137, e_138, t_138, e_139, t_139, e_140, t_140, e_141, t_141, e_142, t_142, e_143, t_143, e_144, t_144, e_145, t_145, e_146, t_146, e_147, t_147, e_148, t_148, e_149, t_149, e_150, t_150, e_151, t_151, e_152, t_152, e_153, t_153, e_154, t_154, e_155, t_155, e_156, t_156, e_157, t_157, e_158, t_158, e_159, t_159, e_160, t_160, e_161, t_161, e_162, t_162, e_163, t_163, e_164, t_164, e_165, t_165, e_166, t_166, e_167, t_167, e_168, t_168, e_169, t_169, e_170, t_170, e_171, t_171, e_172, t_172, e_173, t_173, e_174, t_174, e_175, t_175, e_176, t_176, e_177, t_177, e_178, t_178, e_179, t_179, e_180, t_180, e_181, t_181, e_182, t_182, e_183, t_183, e_184, t_184, e_185, t_185, e_186, t_186, e_187, t_187, e_188, t_188, e_189, t_189, e_190, t_190, e_191, t_191, e_192, t_192, e_193, t_193, e_194, t_194, e_195, t_195, e_196, t_196, e_197, t_197, e_198, t_198, e_199, t_199, e_200, t_200, e_201, t_201, e_202, t_202, e_203, t_203, e_204, t_204, e_205, t_205, e_206, t_206, e_207, t_207, e_208, t_208, e_209, t_209, e_210, t_210, e_211, t_211, e_212, t_212, e_213, t_213, e_214, t_214, e_215, t_215, e_216, t_216, e_217, t_217, e_218, t_218, e_219, t_219, e_220, t_220, e_221, t_221, e_222, t_222, e_223, t_223, e_224, t_224, e_225, t_225, e_226, t_226, e_227, t_227, e_228, t_228, e_229, t_229, e_230, t_230, e_231, t_231, e_232, t_232, e_233, t_233, e_234, t_234, e_235, t_235, e_236, t_236, e_237, t_237, e_238, t_238, e_239, t_239, e_240, t_240, e_241, t_241, e_242, t_242, e_243, t_243, e_244, t_244, e_245, t_245, e_246, t_246, e_247, t_247, e_248, t_248, e_249, t_249, e_250, t_250, e_251, t_251, e_252, t_252, e_253, t_253, e_254, t_254, e_255, t_255, e_256, t_256, e_257, t_257, e_258, t_258, e_259, t_259, e_260, t_260, e_261, t_261, e_262, t_262, e_263, t_263, e_264, t_264, e_265, t_265, e_266, t_266, e_267, t_267, e_268, t_268, e_269, t_269, e_270, t_270, e_271, t_271, e_272, t_272, e_273, t_273, e_274, t_274, e_275, t_275, e_276, t_276, e_277, t_277, e_278, t_278, e_279, t_279, e_280, t_280, e_281, t_281, e_282, t_282, e_283, t_283, e_284, t_284, e_285, t_285, e_286, t_286, e_287, t_287, e_288, t_288, e_289, t_289, e_290, t_290, e_291, t_291, e_292, t_292, e_293, t_293, e_294, t_294, e_295, t_295, e_296, t_296, e_297, t_297, e_298, t_298, e_299, t_299, e_300, t_300, e_301, t_301, e_302, t_302, e_303, t_303, e_304, t_304, e_305, t_305, e_306, t_306, e_307, t_307, e_308, t_308, e_309, t_309, e_310, t_310, e_311, t_311, e_312, t_312, e_313, t_313, e_314, t_314, e_315, t_315, e_316, t_316, e_317, t_317, e_318, t_318, e_319, t_319, e_320, t_320, e_321, t_321, e_322, t_322, e_323, t_323, e_324, t_324, e_325, t_325, e_326, t_326, e_327, t_327, e_328, t_328, e_329, t_329, e_330, t_330, e_331, t_331, e_332, t_332, e_333, t_333, e_334, t_334, e_335, t_335, e_336, t_336, e_337, t_337, e_338, t_338, e_339, t_339, e_340, t_340, e_341, t_341, e_342, t_342, e_343, t_343, e_344, t_344, e_345, t_345, e_346, t_346, e_347, t_347, e_348, t_348, e_349, t_349, e_350, t_350, e_351, t_351, e_352, t_352, e_353, t_353, e_354, t_354, e_355, t_355, e_356, t_356, e_357, t_357, e_358, t_358, e_359, t_359, e_360, t_360, e_361, t_361, e_362, t_362, e_363, t_363, e_364, t_364, e_365, t_365, e_366, t_366, e_367, t_367, e_368, t_368, e_369, t_369, e_370, t_370, e_371, t_371, e_372, t_372, e_373, t_373, e_374, t_374, e_375, t_375, e_376, t_376, e_377, t_377, e_378, t_378, e_379, t_379, e_380, t_380, e_381, t_381, e_382, t_382, e_383, t_383, e_384, t_384, e_385, t_385, e_386, t_386, e_387, t_387, e_388, t_388, e_389, t_389, e_390, t_390, e_391, t_391, e_392, t_392, e_393, t_393, e_394, t_394, e_395, t_395, e_396, t_396, e_397, t_397, e_398, t_398, e_399, t_399, e_400, t_400, e_401, t_401, e_402, t_402, e_403, t_403, e_404, t_404, e_405, t_405, e_406, t_406, e_407, t_407, e_408, t_408, e_409, t_409, e_410, t_410, e_411, t_411, e_412, t_412, e_413, t_413, e_414, t_414, e_415, t_415, e_416, t_416, e_417, t_417, e_418, t_418, e_419, t_419, e_420, t_420, e_421, t_421, e_422, t_422, e_423, t_423, e_424, t_424, e_425, t_425, e_426, t_426, e_427, t_427, e_428, t_428, e_429, t_429, e_430, t_430, e_431, t_431, e_432, t_432, e_433, t_433, e_434, t_434, e_435, t_435, e_436, t_436, e_437, t_437, e_438, t_438, e_439, t_439, e_440, t_440, e_441, t_441, e_442, t_442, e_443, t_443, e_444, t_444, e_445, t_445, e_446, t_446, e_447, t_447, e_448, t_448, e_449, t_449, e_450, t_450, e_451, t_451, e_452, t_452, e_453, t_453, e_454, t_454, e_455, t_455, e_456, t_456, e_457, t_457, e_458, t_458, e_459, t_459, e_460, t_460, e_461, t_461, e_462, t_462, e_463, t_463, e_464, t_464, e_465, t_465, e_466, t_466, e_467, t_467, e_468, t_468, e_469, t_469, e_470, t_470, e_471, t_471, e_472, t_472, e_473, t_473, e_474, t_474, e_475, t_475, e_476, t_476, e_477, t_477, e_478, t_478, e_479, t_479, e_480, t_480, e_481, t_481, e_482, t_482, e_483, t_483, e_484, t_484, e_485, t_485, e_486, t_486, e_487, t_487, e_488, t_488, e_489, t_489, e_490, t_490, e_491, t_491, e_492, t_492, e_493, t_493, e_494, t_494, e_495, t_495, e_496, t_496, e_497, t_497, e_498, t_498, e_499, t_499, e_500, t_500, e_501, t_501, e_502, t_502, e_503, t_503, e_504, t_504, e_505, t_505, e_506, t_506, e_507, t_507, e_508, t_508, e_509, t_509, e_510, t_510, e_511, t_511, e_512, t_512, e_513, t_513, e_514, t_514, e_515, t_515, e_516, t_516, e_517, t_517, e_518, t_518, e_519, t_519, e_520, t_520, e_521, t_521, e_522, t_522, e_523, t_523, e_524, t_524, e_525, t_525, e_526, t_526, e_527, t_527, e_528, t_528, e_529, t_529, e_530, t_530, e_531, t_531, e_532, t_532, e_533, t_533, e_534, t_534, e_535, t_535, e_536, t_536, e_537, t_537, e_538, t_538, e_539, t_539, e_540, t_540, e_541, t_541, e_542, t_542, e_543, t_543, e_544, t_544, e_545, t_545, e_546, t_546, e_547, t_547, e_548, t_548, e_549, t_549, e_550, t_550, e_551, t_551, e_552, t_552, e_553, t_553, e_554, t_554, e_555, t_555, e_556, t_556, e_557, t_557, e_558, t_558, e_559, t_559, e_560, t_560, e_561, t_561, e_562, t_562, e_563, t_563, e_564, t_564, e_565, t_565, e_566, t_566, e_567, t_567, e_568, t_568, e_569, t_569, e_570, t_570, e_571, t_571, e_572, t_572, e_573, t_573, e_574, t_574, e_575, t_575, e_576, t_576, e_577, t_577, e_578, t_578, e_579, t_579, e_580, t_580, e_581, t_581, e_582, t_582, e_583, t_583, e_584, t_584, e_585, t_585, e_586, t_586, e_587, t_587, e_588, t_588, e_589, t_589, e_590, t_590, e_591, t_591, e_592, t_592, e_593, t_593, e_594, t_594, e_595, t_595, e_596, t_596, e_597, t_597, e_598, t_598, e_599, t_599, e_600, t_600, e_601, t_601, e_602, t_602, e_603, t_603, e_604, t_604, e_605, t_605, e_606, t_606, e_607, t_607, e_608, t_608, e_609, t_609, e_610, t_610, e_611, t_611, e_612, t_612, e_613, t_613, e_614, t_614, e_615, t_615, e_616, t_616, e_617, t_617, e_618, t_618, e_619, t_619, e_620, t_620, e_621, t_621, e_622, t_622, e_623, t_623, e_624, t_624, e_625, t_625, e_626, t_626, e_627, t_627, e_628, t_628, e_629, t_629, e_630, t_630, e_631, t_631, e_632, t_632, e_633, t_633, e_634, t_634, e_635, t_635, e_636, t_636, e_637, t_637, e_638, t_638, e_639, t_639, e_640, t_640, e_641, t_641, e_642, t_642, e_643, t_643, e_644, t_644, e_645, t_645, e_646, t_646, e_647, t_647, e_648, t_648, e_649, t_649, e_650, t_650, e_651, t_651, e_652, t_652, e_653, t_653, e_654, t_654, e_655, t_655, e_656, t_656, e_657, t_657, e_658, t_658, e_659, t_659, e_660, t_660, e_661, t_661, e_662, t_662, e_663, t_663, e_664, t_664, e_665, t_665, e_666, t_666, e_667, t_667, e_668, t_668, e_669, t_669, e_670, t_670, e_671, t_671, e_672, t_672, e_673, t_673, e_674, t_674, e_675, t_675, e_676, t_676, e_677, t_677, e_678, t_678, e_679, t_679, e_680, t_680, e_681, t_681, e_682, t_682, e_683, t_683, e_684, t_684, e_685, t_685, e_686, t_686, e_687, t_687, e_688, t_688, e_689, t_689, e_690, t_690, e_691, t_691, e_692, t_692, e_693, t_693, e_694, t_694, e_695, t_695, e_696, t_696, e_697, t_697, e_698, t_698, e_699, t_699, e_700, t_700, e_701, t_701, e_702, t_702, e_703, t_703, e_704, t_704, e_705, t_705, e_706, t_706, e_707, t_707, e_708, t_708, e_709, t_709, e_710, t_710, e_711, t_711, e_712, t_712, e_713, t_713, e_714, t_714, e_715, t_715, e_716, t_716, e_717, t_717, e_718, t_718, e_719, t_719, e_720, t_720, e_721, t_721, e_722, t_722, e_723, t_723, e_724, t_724, e_725, t_725, e_726, t_726, e_727, t_727, e_728, t_728, e_729, t_729, e_730, t_730, e_731, t_731, e_732, t_732, e_733, t_733, e_734, t_734, e_735, t_735, e_736, t_736, e_737, t_737, e_738, t_738, e_739, t_739, e_740, t_740, e_741, t_741, e_742, t_742, e_743, t_743, e_744, t_744, e_745, t_745, e_746, t_746, e_747, t_747, e_748, t_748, e_749, t_749, e_750, t_750, e_751, t_751, e_752, t_752, e_753, t_753, e_754, t_754, e_755, t_755, e_756, t_756, e_757, t_757, e_758, t_758, e_759, t_759, e_760, t_760, e_761, t_761, e_762, t_762, e_763, t_763, e_764, t_764, e_765, t_765, e_766, t_766, e_767, t_767, e_768, t_768, e_769, t_769, e_770, t_770, e_771, t_771, e_772, t_772, e_773, t_773, e_774, t_774, e_775, t_775, e_776, t_776, e_777, t_777, e_778, t_778, e_779, t_779, e_780, t_780, e_781, t_781, e_782, t_782, e_783, t_783, e_784, t_784, e_785, t_785, e_786, t_786, e_787, t_787, e_788, t_788, e_789, t_789, e_790, t_790, e_791, t_791, e_792, t_792, e_793, t_793, e_794, t_794, e_795, t_795, e_796, t_796, e_797, t_797, e_798, t_798, e_799, t_799, e_800, t_800, e_801, t_801, e_802, t_802, e_803, t_803, e_804, t_804, e_805, t_805, e_806, t_806, e_807, t_807, e_808, t_808, e_809, t_809, e_810, t_810, e_811, t_811, e_812, t_812, e_813, t_813, e_814, t_814, e_815, t_815, e_816, t_816, e_817, t_817, e_818, t_818, e_819, t_819, e_820, t_820, e_821, t_821, e_822, t_822, e_823, t_823, e_824, t_824, e_825, t_825, e_826, t_826, e_827, t_827, e_828, t_828, e_829, t_829, e_830, t_830, e_831, t_831, e_832, t_832, e_833, t_833, e_834, t_834, e_835, t_835, e_836, t_836, e_837, t_837, e_838, t_838, e_839, t_839, e_840, t_840, e_841, t_841, e_842, t_842, e_843, t_843, e_844, t_844, e_845, t_845, e_846, t_846, e_847, t_847, e_848, t_848, e_849, t_849, e_850, t_850, e_851, t_851, e_852, t_852, e_853, t_853, e_854, t_854, e_855, t_855, e_856, t_

$$\mathbb{Z}[\pi] = \mathbb{Z}[\pi_1(S')] = \mathbb{Z}[E] = \mathbb{Z}[E^\pm]$$

$$1 \leftrightarrow t$$

$$C_0^{\text{cell}}(S', S') \simeq \mathbb{Z}[t^\pm]. \tilde{e}_0 \xleftarrow{\partial} C_1^{\text{cell}}(S', S') \simeq \mathbb{Z}[t^\pm]. \tilde{e}_1$$

$$\partial \tilde{e}_1 = t\tilde{e}_0 - \tilde{e}_0 = (t-1)\tilde{e}_0$$

$$C_1^{\text{cell}}(S', S') : \mathbb{Z}[t^\pm] \xrightarrow{\times(t-1)} \mathbb{Z}[t^\pm]$$

$$C_1(S', S') \otimes_{\mathbb{Z}[t^\pm]} \Pi : M \xleftarrow{\quad \downarrow \quad \text{is} \quad \downarrow \quad \text{is} \quad \downarrow \quad} M \quad m$$

$$1 \otimes_m \mathbb{Z}[t^\pm] \otimes \Pi \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[t^\pm] \otimes \Pi \xrightarrow{\quad 1 \otimes_m \quad} \mathbb{Z}[t^\pm]$$

$$m \simeq 1 \otimes_m \xrightarrow{\partial} (t-1) \otimes_m = t \otimes_m - 1 \otimes_m = 1 \otimes E \cdot m - 1 \otimes m \\ = \varphi^*(m) - m = (\varphi^* - 1)m$$

$$\Pi \xleftarrow{\varphi^*-1} \Pi$$

On en déduit $H_0(S', \Pi) = \Pi / \text{Im}(\varphi^*-1)$ $H_1 = \text{Ker}(\varphi^* - I)$
 $= \text{Fix}(\varphi^*)$
 $= \text{Fix}(\varphi).$

$$\text{idem } C^*(X, \Pi) : \Pi \xrightarrow{\varphi^*-1} \Pi$$

$$H^0(S', \Pi) = \text{Ker}(\varphi^*-1) = \text{Fix}(\varphi)$$

$$H^1(S', \Pi) = \text{Coker}(\varphi^*-1) = \Pi / \text{Im}(\varphi^*-1)$$

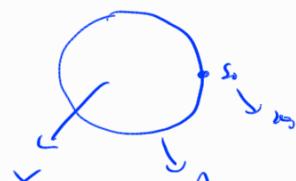
Dualité de Poincaré: si on a une variété orientable compacte de $\dim n$ $H_k(X, \Pi) \simeq H^{n-k}(X, \Pi)$

Exercice: Si X est un CW-complexe fini et Π est un k -espace vectoriel de dim finie alors $H_k(X, \Pi)$ sont des k -ev du dimfini

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim H_k(X, \Pi) = \chi(X) \cdot \dim \Pi$$

en particulier c'est indépendant de l'action de $\pi_1(X)$ sur Π !

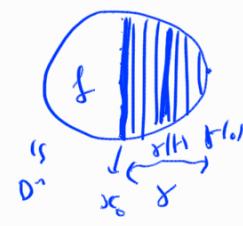
Rappel, $\pi_1(A) \curvearrowright \pi_n(X, A)$ $f: (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A)$
 $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$



autre façon



$\gamma \cdot f$



$$\partial D^n \rightarrow A$$

$$\gamma: x_0 \rightsquigarrow f(s_0)$$

2.5 Obstruction à prolonger une application

Soit (X, A) une paire de CW-complexes
et $f: A \rightarrow B$ une app. continue.

Peut-on prolonger f à X ?

On va résoudre ce problème en construisant l'application \tilde{f} de proche en proche par récurrence sur le squelette de X .

On va toujours supposer que A, X, B sont connexes par arcs et on pris $x_0 \in A$ et $f(x_0) = b_0$.

Première partie: Si f se prolonge en \tilde{f} , alors on a
un diagramme

$$\pi_1(A, x_0) \xrightarrow{\tilde{f}_+} \pi_1(B, b_0)$$

ie on a $\tilde{f}_+: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ qui fait commute le diagramme

Proposition: si $\exists \phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ qui fait commute le diagramme
alors on peut étendre f au 2-squelette de X ie $\exists \tilde{f}: A \cup X^2 \rightarrow B$

démo: on se donne un tel $\phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$

on choisit un sous-complexe $T \subset X^1 \setminus A^1$

qui soit un revêtement de composantes contractiles
et qui rencontre A en un seul point, et
maximal pour ces deux propriétés

$T = \bigsqcup T_i$ $T_i \cap A = \{x_i\}$ T_i est contractile
 $T \subset X^1 \setminus A^1$ décomposition de T
en composantes connexes.

Chaque composante T_i rencontre A en x_i

On va poser $\tilde{f}(x) = f(x_i)$ si $x \in T_i$

toute arête e de $X^1 \setminus T$ rencontre $T \cup A$ sur ses deux extrémités (sinon on aurait dû la rajouter à T)

On l'ouvre et on prend un élément de $\pi_1(K, x_0)$ qui passe par cette arête n'intersectant pas $\tilde{f}(e) \in \pi_1(B, b_0)$.

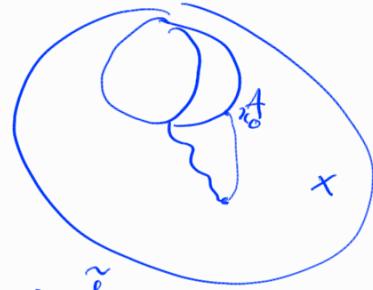
On connaît $\varphi(e) \in \pi_1(B, b_0)$.

On peut définir $\tilde{f}|_e: e \rightarrow B$ de sorte à avoir $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \varphi(e)$.

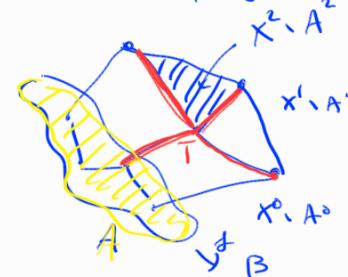
Cela permet de définir \tilde{f} sur le 1-squelette $A \cup X^1$

On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A \cup X_1) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_1(X_1) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(B) \\ \uparrow \text{in } \pi_1(A) & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & \dashrightarrow & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & \\ & & \pi_1(A) & & \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \cup & \downarrow & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

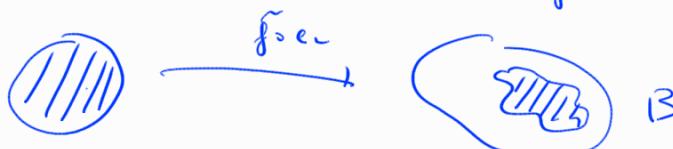


Pour nous maintenant au 2-squelette: on se donne une 2-cellule

$$e_2: D^2 \rightarrow X^2 \quad \text{tq} \quad e_2(\partial D^2) \cap A = \emptyset.$$

$$e_2(\partial D^2) \subset X^1 \xrightarrow{\tilde{f}} B$$

le problème revient à étendre \tilde{f} de S^1 à D^2



Une telle extension est possible si $[\tilde{f}(e_2(\partial D^2))] = 0$ dans $\pi_1(B)$

ou $e_2(\partial D^2)$ bordure un disque dans X .

Elle est donc nulle dans $\pi_1(X)$. On a $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B)$ est un morph. de groupe donc $\varphi(e_2(\partial D^2)) = 0$

$$[\tilde{f}(e_2(\partial D^2))] = 0. \quad \text{cgfd.}$$

On fait un choix arbitraire sur chaque 2-cellule de $X \setminus A$
cela définit une extension continue $\tilde{f}: A \cup X^2 \rightarrow B$. \square

Problème d'extension au (n+1)-squelette avec n > 2

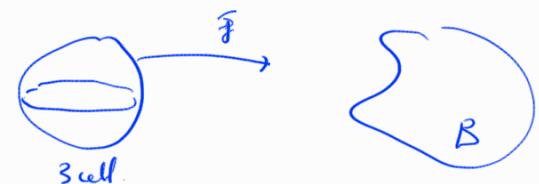
On veut construire $\tilde{f}: X \rightarrow B$ par récurrence. Supposons par hypothèse qu'on a étendu l'application $\tilde{f}: X^n \cup A \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccc} X^n \cup A & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \downarrow & \nearrow & \\ A & \xrightarrow{f} & \end{array}$$

Cherchons à la prolonger au (n+1)-squelette. On se donne

$$e_i^{n+1}: D^{n+1} \xrightarrow{\sim} X$$

$$\partial D^{n+1} = S^n \xrightarrow{\sim} X^n \xrightarrow{\tilde{f}} B$$



Pour savoir si on peut étendre \tilde{f} à l'intérieur de D^{n+1} , il faut et il suffit que l'application $\tilde{f} \circ e_i^{n+1}|_{S^n} \rightarrow B$ soit homotope à une application constante. Il y a un élément de $\pi_n(B)$ qui est nul.

Il y a un problème avec le point base: l'application précédente n'inclut pas x_0 dans x_0 .

Le problème se résout en considérant l'homologie bordure à coeff dans B

On voudrait définir un morphisme $\Omega_{n+1}: \underline{C_{n+1}^{\text{cell}}(X, B)} \rightarrow \underline{\pi_n(B)}$

On voudrait en plus que Ω_{n+1} définisse un élément de $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$.
on l'appellera clair d'obstruction de degré n+1.

1er problème à priori on n'a pas bien défini le groupe $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$ car on n'a pas encore défini $f: X \rightarrow B$ qui permet de définir la cohomologie.

Rigue: l'homologie de X à coeffs dans un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$ -module ne dépend de B que via l'action de $\pi_1(B)$ sur π_1 .

Si on se donne B' et $B \xrightarrow{g} B'$ qui induit un iso $\pi_1(B) \xrightarrow[g]{} \pi_1(B')$

$$H_n(X, \pi_1) \cong H_n(X, \pi_1)$$

$$(f: X \rightarrow B) \quad (g \circ f: X \rightarrow B')$$

Consequence importante: on peut remplacer B par un $K(\pi_1)$ i.e. on peut coller à B des 3-cellules, 4-cellles, ... pour avoir $\pi_k(B) = 0$ $\forall k > 1$.

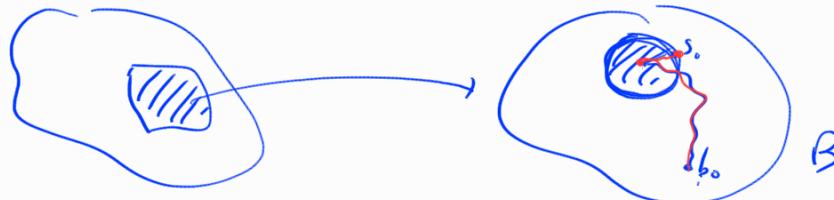
$$\begin{array}{ccc} A \cup X & \xrightarrow{f} & B' \\ \downarrow & & \uparrow \\ A \cup X & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad B' = K(\pi_1(B), 1)$$

Si on remplace B par B' , il n'y a pas d'obstruction à prolonger f à $A \cup X$ (car $\pi_n(B') \Rightarrow H_{n+2}$).

Cela permet de définir quand-même $H^*(X, \pi_n(B))$ bien que f ne soit pas encore complètement définie.

Def de O_{n+1} : $O_{n+1} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}^{\text{cell}}(X, B'), \pi_n(B))$

on rappelle qu'un élément de $C_{n+1}^{\text{cell}}(X, B')$ est un couple $e_i^{n+1}: D^{n+1} \rightarrow X$ et un chemin $\gamma_i^{n+1}: [0, 1] \rightarrow B'$ qui relie le à $f(e_i^{n+1}(c_{nn}))$.



$$\begin{aligned} (S^n, S_0) &\rightarrow (B, b_0) \\ \text{I} \quad (f, \gamma) &\quad \left\{ \begin{array}{l} f: S^n \rightarrow B \\ \gamma: b_0 \rightarrow f(S_0) \end{array} \right. \end{aligned}$$

on lui associe un élément de $\pi_n(B)$ que l'on note $(e_i^{n+1}, \gamma_i^{n+1}) = (f|_{D^{n+1}}, \gamma_i^{n+1})$ où γ_i^{n+1} est le chemin obtenu en composant γ_i^{n+1} avec l'image par f d'un rayon relatif c_{nn} à $s_0 \in S^n$.

Cette construction est compatible avec l'action de π_1 : $O_{n+1}(x \cdot x') = x \cdot O_{n+1}(x')$ ainsi $O_{n+1} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}^{\text{cell}}(X, B'), \pi_n(B))$.

Proposition: (i) O_{n+1} est un cocycle i.e. $\partial O_{n+1} = 0 \Leftrightarrow O_{n+1} \circ \partial = 0$

(ii) O_{n+1} est une $\Rightarrow f$ se prolonge à X^{n+1} .

démo: (ii) a été expliquée précédemment.

démontrons le 1er point. On revient sur la construction de Ont_n .

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xleftarrow{\text{ht}} \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X^n, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_n(B, b_0)$$

e_i^{n+1}

Ont_n

il faut remplacer ces espaces par des unions avec coefficients dans B .
 [Homotopy theory Whitehead]

$C_{\text{ntz}}^{\text{cell}}(X, B')$

$$\begin{array}{ccc} H_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}, \mathbb{Z}[\pi]) & \xleftarrow[\text{reg}]{}^{\text{ht}} & \pi_{n+2}(X^{n+2}, X^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^{n+1}, \mathbb{Z}[\pi]) & \xleftarrow{h} & \pi_{n+1}(X^{n+1}, x_0) \\ \downarrow & & \boxed{\substack{\text{deux termes consécutifs} \\ \text{dans la suite exacte longue}}} \\ H_n(X^{n+1}, X^n, \mathbb{Z}[\pi]) & \xleftarrow{\quad} & \pi_n(X^{n+1}, X^n, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X^n, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \\ C_{n+1}^{\text{cell}}(X, B') & & \end{array}$$

$\text{diff du complexe cell}$

Ont_n

$= 0?$

fin de la preuve.

Proposition: Soit X un CW-complexe $f: X^n \rightarrow B$ def. sur le n -squelette. $\text{Ont}_n(f)$ est un cobord si $\exists f': X^{n+1} \rightarrow B$ qui coïncide avec f sur X^{n-1} et telle que f' se prolonge à X^{n+1} .

Conclusion: si $[\text{Ont}_n(f)] = 0$ dans $H^{n+1}(X, \pi_n(B))$ alors on peut modifier f sur X^n pour la prolonger à X^{n+1} .

preuve: Supposons qu'il existe $f': X^{n+1} \rightarrow B$ tq $f = f'$ sur X^n .

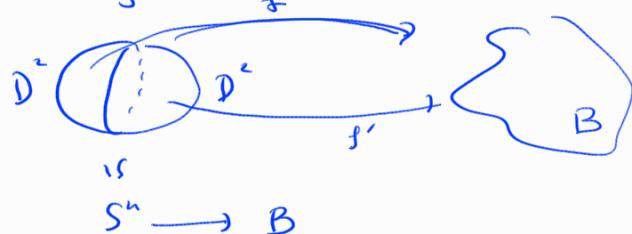
Pour chaque n -cellule $e_i^n: D^n \rightarrow X$

on peut considérer $f \circ e_i^n: D^n \rightarrow B$

$f' \circ e_i^n: D^n \rightarrow B$

comme f et f' coïncider sur X^{n-1}

on peut définir $\delta(f, f'): D^n \cup D^n \rightarrow B$



on prend la marge en considération: $\delta(f, f') \in \text{Hom}(C_n^{\text{cell}}(X, B), T_n(B))$

on vérifie que

$$\boxed{\Omega_{n+1}(f) = \Omega_{n+1}(f') + \delta(f, f') \circ \partial} \quad \text{adres}$$

ici puisque f' se prolonge à X^{n+1} , $\Omega_{n+1}(f') = 0 \Rightarrow \Omega_{n+1}(f)$ est un cobord $\Rightarrow [\Omega_{n+1}(f)] = 0 \in H^{n+1}(X, T_n(B))$