

Chapitre I Homotopie, variétés et CW-complexes

L'objectif de la topologie algébrique est la classification des espaces topologiques à homéomorphisme près. On se rend vite compte que c'est illusoire, il y a trop d'espaces.

Citons par exemple un théorème de Bing:

$\exists (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ avec A indénombrable tq $\forall \alpha$
 $X_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ est compact, connexe, localement connexe,
de dim topologique 1, sans point de coupure et
indécomposables (pas réunion de compacts connexes propres)
et de plus $\forall \alpha \neq \beta \quad X_\alpha$ non homéomorphe à X_β

C'est dû à l'existence du pseudo-arc

$[0,1] \xleftarrow{f_1} [0,1] \xleftarrow{f_2} [0,1] \xleftarrow{\dots} \dots$ si continue linéaire par morceaux

alors $P = \{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_i = f_i(x_{i+1}) \forall i \}$

avec la topologie induite de la top produit P est compact,
connexe, métrisable et chaque $p_i: P \rightarrow [0,1]$ est
 $(x_1, \dots) \mapsto x_i$ surjectif

on demande que $\forall a < b \quad f_n([a,b]) =$ union finie d'intervalle

f_n a de nombreux zig zags d'amplitude très faible

On va donc limiter la complexité des espaces topologiques en se concentrant sur deux familles:

- variétés topologiques

- CW complexes.

Mais on va aussi affaiblir la notion d'homéomorphisme en introduisant celle d'homotopie qui va jouer un rôle fondamental.

I Homotopie

Def : soit X, Y deux espaces top et $f, g: X \rightarrow Y$ deux app. continues. Une **homotopie** entre f et g est une app. continue $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tq $\begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} \forall x \in X$.

Si il existe une telle homotopie entre f et g , elles sont dites homotopes et on note $f \sim g$.

Notation : on écrit souvent $H(x, t) = h_t(x)$ de sorte que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. De cette façon H est une famille continue d'applications continues reliant f à g .

Prop : la relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Preuve : - $H(x, t) = f(x)$ relie f à f

- Si H est une homotopie entre f et g $H(x, T-t)$ en est une entre g et f

- Si H est une homotopie entre f et g
 H' g et h

alors on définit $H'': X \times [0, 1] \rightarrow Y$ par

$$H''(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t+1) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t-1) & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

le fait que H'' soit continue résulte du lemme élémentaire suivant :

Lemme : Soit $X = F_1 \cup F_2$ la réunion de deux fermés et $f_1: F_1 \rightarrow Y$ $f_2: F_2 \rightarrow Y$ deux app. continues,

$$f_1|_{F_1 \cap F_2} = f_2|_{F_1 \cap F_2}.$$

$$\text{Alors en posant } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in F_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$$

on définit une application continue

Proposition : Si $f, g: X \rightarrow Y$ et $h: Y \rightarrow Z$ sont continues et $f \sim g$ alors $h \circ f \sim h \circ g$

De même si $h: X \rightarrow Y$ et $f, g: Y \rightarrow Z$ sont continus et $f \sim g$ alors $f \circ h \sim g \circ h$.

Exemple: si $Y \subset \mathbb{R}^n$ est convexe alors $f, g: X \rightarrow Y$ sont toujours homotopes: poser $H(u, t) = (1-t)f + tg$

Def: On dit que $f: X \rightarrow Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g: Y \rightarrow X$ tq $f \circ g \sim \text{Id}_Y$
 $g \circ f \sim \text{Id}_X$

* On dit que X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe un tel g . On écrit $X \sim Y$

* On dit que X est **contractile** si $X \sim \text{pt}$
 $\Leftrightarrow \text{Id}_X \sim \text{cte}$

Exemple: un sous-espace $X \subset \mathbb{R}^n$ étoilé en x_0 est contractile: poser $H(x, t) = (1-t)x + tx_0$

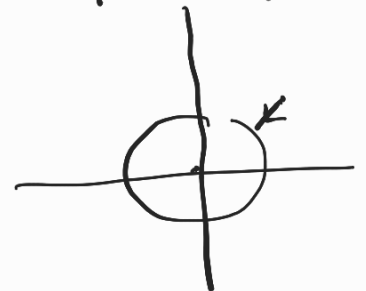
Def: Si $A \subseteq X$ on dit que A est un **retract** de X s'il existe $r: X \rightarrow A$ continue tq $r(a) = a \forall a \in A$

On dit que A est un **retract par déformation** s'il existe $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tq $H(x, 0) = x$
 $H(x, 1) \in A$
 et $H(a, t) = a \forall a \in A$.
 $\forall x \in X$.

Observation: une rétraction par déformation est une équivalence d'homotopie.

Exemple: $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un retract par def.

Posons $H(x, t) = \frac{x}{|x|}t$



La rétraction par def est un exemple d'homotopie relative.

def: si $A \subset X$ et $f, g: X \rightarrow Y$

une homotopie de f à g relative à A est une app.

continue $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tq $H(x, 0) = f(x)$
 $H(x, 1) = g(x)$
 $\forall t \quad H(a, t) = f(a) (= g(a))$

II Variétés topologiques

Un espace particulièrement simple et intéressant est

def: une variété topologique de dim n est un espace topologique X qui est

(i) localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (tout point admet un voisinage homéo à $\mathbb{R}^n$)

(ii) séparé

(iii) à base dénombrable

} conditions pas toujours imposées

Exemple: une variété de dim 0 est un ensemble discret dénombrable

Exercice: toute variété topologique est la réunion disjointe de ses composantes connexes par arcs.

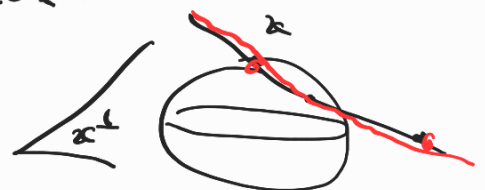
Proposition: toute variété de dim 1 connexe est homéo à S^1 si elle est compacte, à $\mathbb{R}$ sinon.

Preuve: TD

Exemple: ① $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$
est une variété de dim n compacte.

Preuve: $S^n - \{x\} \simeq x^\perp \simeq \mathbb{R}^n$

par projection stéréographique



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) &= \{ D \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ droite vectorielle} \} \\ &= \{ (x_0 \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \} / x \sim \lambda x \\ &\quad \lambda \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est recouvert par $U_i = \{ (x_0 \dots x_i \dots x_n) \mid x_i \neq 0 \}$

et $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$

$$(x_0 \dots x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x_i}}{\hat{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \quad \triangle \text{ tester la séparabilité}$$

Produit : si X est une variété de dim n et Y de dim m alors $X \times Y$ est une variété de dim $n+m$

Thm Quotient : soit G un groupe agissant sur une variété topologique X de dimension n tel que

(i) l'action de G est continue : $\forall g \quad \begin{matrix} X \rightarrow X \\ x \mapsto g \cdot x \end{matrix}$ est continue

(ii) l'action est libre : $\forall g \neq 1 \quad \forall x \in X \quad g \cdot x \neq x$

(iii) l'action est propre : $\forall K$ compact $\subset X$

$\{ g \in G, gK \cap K \neq \emptyset \}$ est fini.

Alors le quotient X/G est une variété top de dim n .

Preuve : On note $p: X \rightarrow X/G$ on choisit $x_0 \in X$
 $x \mapsto [x] \quad p(x_0) = [x_0]$

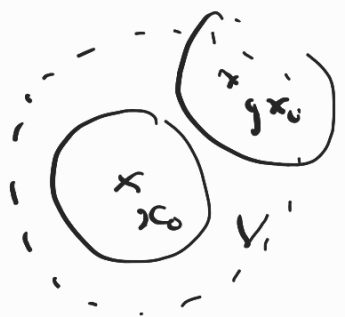
Comme X est loc. compact $\exists V$ vois. compact de x_0 tq

$$\{ g \in G, gV \cap V \neq \emptyset \} = \{ 1, g_1, \dots, g_n \}$$

$\forall i \geq 1 \quad g_i x_0 \neq x_0$. Par séparation

$\exists U, W$ disj contenant x_0 et $g_i x_0$

en prenant $V \cap U \cap \bar{g}_i W = V'$



on s'assure que $gV' \cap V' \neq \emptyset$ minor

$$\exists x \in U \cap \bar{g}'W \cap gU \cap W \quad \nexists$$

itérant l'argument, on a finalement trouvé V

$$\text{tq } gV \cap V = \emptyset \quad \forall g \neq 1$$

$$\text{On en déduit que } \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & X/G \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

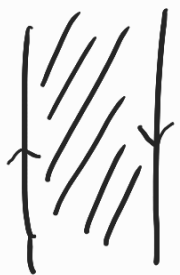
est un homéo sur son image donc X/G est une variété de dim n .

Exemples: $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ par $v. x = v + x$

cette action est propre et libre $\Rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est une variété

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$$

$$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2 \text{ par } n. (x, y) = (x+n, (-1)^n y)$$



$$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \simeq \text{Pöblius.}$$

Enfin: considérons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n \quad z \mapsto -x$

$$\text{On a alors } \begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & \mathbb{RP}^n \\ x & \longmapsto & \text{Vect}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow \sim & \text{bij continue} \\ \dots & S^n / \mathbb{Z}_2 & = \text{homéo} \end{array}$$

Somme connexe: Si M et N sont deux

variétés connexes de dim n , on définit $M \# N$

de la façon suivante: on choisit $x \in \mathbb{N}$
 et $B_x \subset \mathbb{N}$ boules
 fermées

puis $y \in \mathbb{N}$ $B_y \subset \mathbb{N}$

puis on pose $M \# N = M \setminus \overset{\circ}{B}_x \sqcup N \setminus \overset{\circ}{B}_y$

Comme $B_x \simeq B^1 \simeq B_y$, $\exists \varphi: \partial B_x \xrightarrow{\text{homé}} \partial B_y$

la relation $\sim$ est déf par $\varphi(x) \sim x$.

Thm: toute variété de dim 2 est obtenue par
 somme connexe à partir de T^2 et $\mathbb{R}P^2$

$$\triangle! \quad T^2 \# \mathbb{R}P^2 \simeq \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

et cette relation engendre toutes les autres!

On peut se demander si pour des variétés
 topologiques, la notion d'homotopie et d'homé-
 éomorphisme coïncident. C'est vrai en dim ≤ 2 , pas au-delà.

Exemple des espaces lenticulaires

$p \nmid q$, $q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \curvearrowright S^3 \subset \mathbb{C}^2$$

$$\text{par } 1.(x, y) = \left(e^{\frac{2i\pi}{p}} x, e^{\frac{2i\pi q}{p}} y \right)$$

Cette action est propre et libre, on pose

$$L(p, q) = S^3 / \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Question: Quand a-t-on $L(p, q) \underset{\text{homio}}{\simeq} L(p', q')$

Quand $L(p, q) \underset{\text{homotopie}}{\sim} L(p', q')$

Réponse: $L(p_1, q_1) \simeq L(p_2, q_2)$

$$\Leftrightarrow p_1 = p_2 \text{ et } q_1 = \pm q_2^{\pm 1} \text{ mod } p_1$$

Puis $L(p_1, q_1) \sim L(p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 = p_2$

$$\text{et } \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tq } q_1 q_2 = \pm n^2 [p_1]$$

III CW-complexes (Whitehead 1949)

On note $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

$$\text{et } S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$$

Noter que α homio mais cela ne dépend pas de $\|\cdot\|$

Topologie finale: Soit X un ensemble et
 $f_i: Y_i \rightarrow X$ une famille d'apps où
 Y_i est un espace top

On définit une top sur X en déclarant

$U \subset X$ ouvert ssi $f_i^{-1}(U)$ ouvert ds $Y_i \forall i \in I$.

C'est la topologie la moins fine rendant les f_i continues.

ex 1 si $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X$

avec les X_i top alors X est muni de la top
finale pour les inclusions $X_i \hookrightarrow X$ dite lim. inductive

ex2 Si X est top mun d'une relation $\sim$
alors le top quotient est le top final $X \rightarrow X/\sim$

ex3 Si X, Y top, $A \subset X$ et $f: A \rightarrow Y$
on def $\sim_f$ la relation sur $X \sqcup Y$ engendrée
par $a \sim_f f(a)$ et le quotient $X \sqcup Y / \sim_f$ est
aussi noté $X \sqcup_f Y$ et appelé recollement
de X et Y le long de f .

Sous exemple: si $Y = \text{pt}$ on note X/A le quotient

Def: un CW complexe est un espace top X muni
de sous-espaces $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$
tels que

(i) X_0 est une union disjointe de points (top discrète)

(ii) $\forall n \geq 1, \exists f_i: S^{n-1} \rightarrow X_{n-1} \quad i \in I$ tq

$X_n = \left(\coprod_{i \in I} D^n \right) \sqcup_{f_i} X_{n-1}$ est le recollement

de X_{n-1} et de disques de dim n le long de leur bord

(iii) $X = \bigcup X_i$ muni de la top. limite inductive.

- On dit que X_n est le n -squelette de X

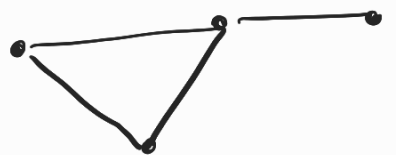
- Une n -cellule est l'image de $D^n \rightarrow X_n \hookrightarrow X$

- Une n -cellule ouverte est l'image de $\mathring{D}^n \hookrightarrow X_n \hookrightarrow X$

- X est dit fini s'il y a un nombre fini de cells
- Un sous-CW-complexe est un sous-espace fermé $Y \subset X$ qui est union de cellules entières en posant $Y_n = Y \cap X_n$, il est muni d'une structure de CW-complexe
- la dimension de X est le max des dimensions des cellules qui le composent.

Exemples: ① Un CW-complexe de dim 0 est un ensemble discret.

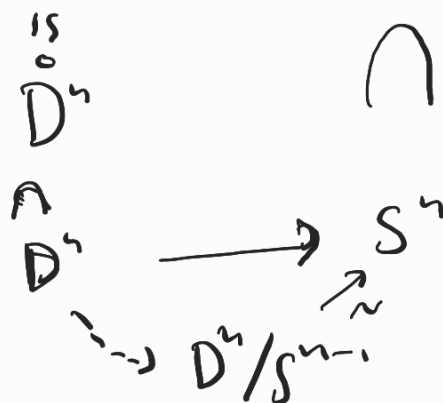
② Un CW complexe de dim 1 est un graphe



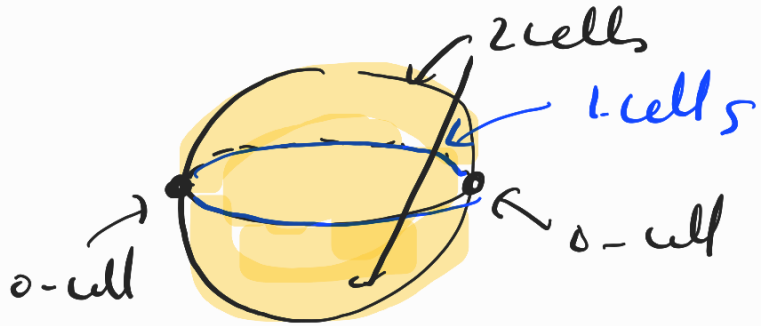
③ La sphere est homéo à D^n / S^{n-1}

proj stéro

$$\mathbb{R}^n \simeq S^n \setminus \{x\}$$



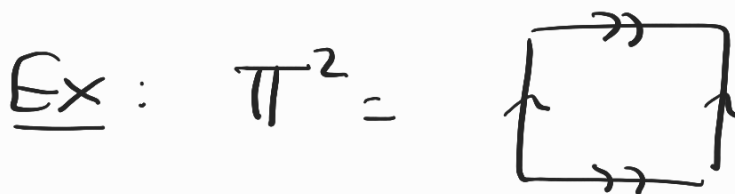
⚠ il y a beaucoup de structures cellulaires ≠ sur un même espace



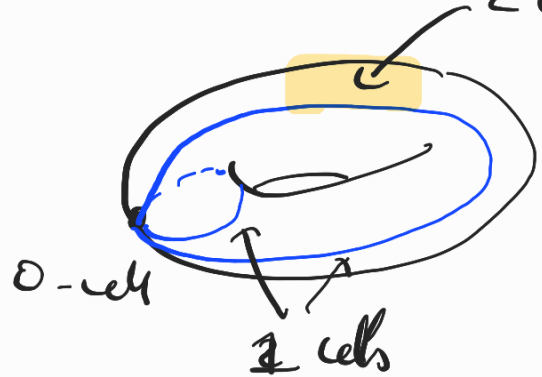
Mais on ne peut pas faire n'importe quoi :

Thm Si X possède deux décompositions cellulaires finies alors $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \# \{n\text{-cells}\} = \chi(X)$ est bien défini

ex: pour S^2 $1 + 0 + 1 = 2 - 2 + 2 = 2$ 2 cell



$$\chi(\mathbb{T}^2) = 1 - 2 + 1 = 0$$



Et plus généralement, on recollent un $4g$ -gone à l'aide du recollent $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

On obtient une surface de genre g $S_g = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ fois}}$

$$\chi = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g.$$

On peut se demander si toute variété admet une décomposition cellulaire (est un CW-complexe)

Thm 1 toute variété compacte est homotopiquement équiv. à un CW-complexe Kirby-

Siebenmann - 69

Thm 2: Toute variété compacte est homéo à un CW-complexe en dim

$n \leq 2$ Radó 1926

$n = 3$ Peirce 1952

$n = 6$ Kirby-Siebenmann 1977

$n = 5$ Quinn 1952

$n = 4$ ouvert.

Thm: toute variété compacte de dim n est un retract d'un CW-complexe fini.

(suffisant pour les applications qu'on a en tête)

Prop 1: toute variété top compacte est homéo à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ $N \gg 0$

Prop 2: tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ admet une base de voisinages homéo à un C^0 -corp. fini

Prop 3: un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ qui est localement contractile (admet une base de vois. contractils) est retract d'un de ses voisinages.

Preuve du thm

Par prop 1, ops $K \subset \mathbb{R}^N$ - K variété

donc loc contractile $\Rightarrow K$ retract d'un voisinage

Par prop 2, on retrace r à un $U \supset K$ qui a un CW-complexe

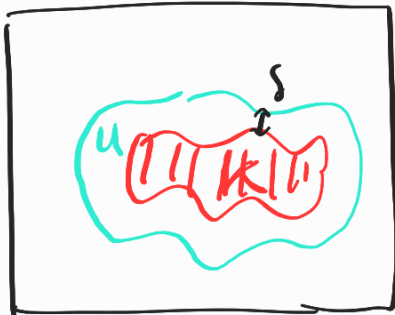
Preuve de prop 1 $\forall x \in K \exists U_x \text{ vois. de } x \simeq \mathbb{R}^n$
 Par compacité on extrait $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k} = X$

On considère alors la composition

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & X^k & \longrightarrow & (X/U_{x_1})^{\times} & \dots \times & (X/U_{x_k})^{\times} \\ x \mapsto & & (x_1, \dots, x_k) & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & & & S^n & \times \dots \times & S^n \\ & \searrow f & & & & \cap & \\ & & & & \mathbb{R}^{n+1} & \times \dots \times & \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

f est continue injective, X compact, $\mathbb{R}^{(n+1)k}$ séparé (=) f fermé
 $\text{donc } K = f(X)$

Preuve de prop 2 $K \subset \mathbb{R}^n$ en appliquant une
 transfo affine ops $K \subset]0,1[^n$. On se donne
 un voisinage de K et $\delta = \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$ car
 K compact



Soit $r \in \mathbb{N}$ tq $\frac{\sqrt{n}}{2^r} < \delta$

deux points d'un cube de côté $\frac{1}{2^r}$
 sont à distance $\leq \frac{\sqrt{n}}{2^r}$

$\Rightarrow$ un cube de côté $\frac{1}{2^r}$ qui intersecte K est dans U .

On subdivise $[0,1]^n$ en $(2^r)^n$ cubes de côté $\frac{1}{2^r}$.

On pose $V = \bigcup_{C \cap K \neq \emptyset} C$

alors $V \subset U$ par choix de r

V voisinage de K car $\forall x \in]0,1[^n$, $\bigcup_{x \in C_i} C_i$
 est un voisinage de x

• V a une structure de CW-complexe

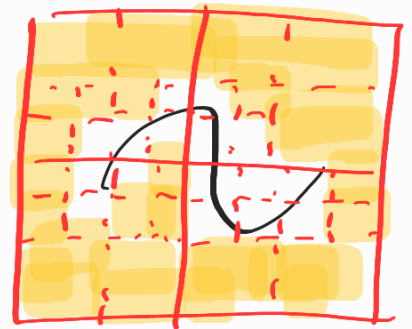
On choisit pour d -cellules de V les cubes de dimension d de la forme $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [\frac{k_i}{2^r}, \frac{k_i+1}{2^r}] \text{ si } i \in I \text{ et } x_i = k_i \text{ si } i \notin I\}$
 où $|I| = d$ et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ qui sont inclus dans V .

Preuve de la prop 3 (difficile)

Etape 1 on munir $X \subset \mathbb{R}^n \subset K$ d'une structure de CW-comp

On écrit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} [k_1, k_1+1] \times \dots \times [k_n, k_n+1]$

- chaque cube inclus dans X on le garde -
- les autres on les subdivise en 2^n cubes de côté $\frac{1}{2}$
- on itère



Etape 2 : on définit un CW-complexe $Z \subseteq X$ et une application $r: Z \rightarrow K$ par récurrence sur le squelette.

- les 0-cellules de Z sont les mêmes que celles de X
 $\forall x \in Z^0 = X^0$ on choisit $r(x) \in K$ parmi les points de K les plus proches de x .
- pour tout $k \geq 1$, les k -cellules de Z sont les k -cellules de X dont le bord est $\subseteq Z_{k-1}$ et telle que la restriction de r à ce bord s'étend continuellement dans

une fonction à valeurs dans K .

On choisit une telle extension de distance métrique

Etape 3: on vérifie que $Z \cup K$ est un voisinage de K et r s'étend en une rétraction continue $r: Z \cup K \rightarrow K$

On pose $r(x) = x \quad \forall x \in K$

Fixons $x \in K$: montrons que $Z \cup K$ est un voisinage de x et que i est continue en x .

On utilise le fait que K est loc. contractile

$$K \supset \bigcup_n \supset B(x, r_n) \cap K \supset B(x, \frac{r_n}{2}) \cap K \supset \bigcup_{n-1} \supset B(x, r_{n-1}) \cap K \\ \text{contractile} \supset B(x, \frac{r_1}{2}) \cap K \supset U_0 \supset B(x, r_0) \cap K \ni x \\ \text{contractile} \quad B(x, \frac{r_0}{2}) \cap K \ni x$$

On note $Y \subseteq X$ le sous-complexe formé des cellules $\subseteq B(x, \frac{r_0}{2})$

On montre par rec. sur k que $\begin{cases} Y_k \subseteq Z \\ r(Y_k) \subseteq U_k \end{cases}$

Il suit que $Z \cup K$ contient $Y \cup K$ et donc

est un voisinage de x et que r est continue en x

(car $r(Y) \subseteq U_n$ et U_n était arbitraire)

IV Groupes d'homotopie

4.1 Groupe fondamental

Def: X espace topologique $x, y \in X$

- un chemin de x à y est $\alpha: [0,1] \rightarrow X$
avec $\alpha(0) = x$ $\alpha(1) = y$

- un lacet basé en x est un chemin de x à x .

Le chemin inverse de $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ de x à y
est le chemin $\bar{\alpha}$ de y à x défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$

La concaténation de $\alpha: x \rightarrow y$ et $\beta: y \rightarrow z$
est le chemin de x à z $\alpha\beta: [0,1] \rightarrow X$

défini par $\alpha\beta(t) = \alpha(2t)$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$
 $= \beta(2t-1)$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$

Def: On note $\pi_1(X, x)$ l'ens. des classes
d'homotopie relative à $\{0,1\}$ des lacets basés en x

Prop: La concaténation munit $\pi_1(X, x)$ d'une
structure de groupe où $\bar{\alpha}$ est l'inverse
de α et le neutre est le lacet constant $t \mapsto x$

La preuve consiste à montrer que

- la concaténation passe au quotient par homotopie
- la loi est associative
- le chemin $\bar{\alpha}$ est bien l'inverse de α

Cela résulte des trois lemmes ci-dessous.

Lemme A: Si $\alpha, \alpha': x \rightarrow y$ sont homotopes
 $\beta, \beta': y \rightarrow z$ aussi
 alors $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont homotopes.

Soit $H(s, t)$ l'homotopie de α à α' $H(0, t) = \alpha(t)$
 $K(s, t)$ ——— β à β' $K(0, t) = \beta(t)$
 $K(1, t) = \beta'(t)$

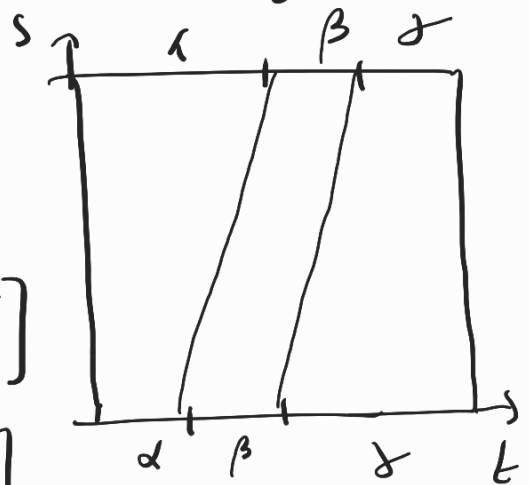
alors $(s, t) \mapsto \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} \\ K(2s-1, t) & \text{si } s > \frac{1}{2} \end{cases}$ est une homotopie de $\alpha\beta$ à $\alpha'\beta'$

Lemme B: si $\alpha: x \rightarrow y$ $\beta: y \rightarrow z$ $\gamma: z \rightarrow w$
 alors $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$

$$(s, t) \mapsto \alpha\left(\frac{4t}{2+s}\right) \quad t \in \left[0, \frac{1+s}{4}\right]$$

$$\beta(4t-s-1) \quad t \in \left[\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}\right]$$

$$\gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) \quad t \in \left[\frac{2+s}{4}, 1\right]$$



Lemme C: Soit $\alpha, \beta: x \rightarrow y$ deux chemins
 alors (0) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$

(1) $\alpha \bar{\alpha} \sim C_x$

(2) $\bar{\alpha} \alpha \sim C_y$

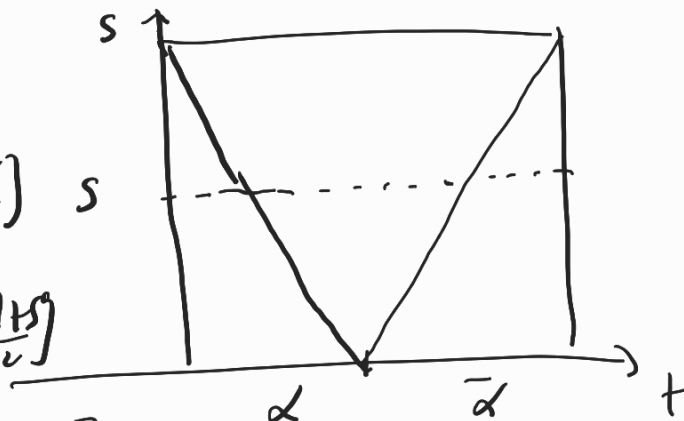
(3) $C_x \alpha \sim \alpha$

(4) $\alpha C_y \sim \alpha$

Preuve: (0) $H(s, 1-t)$ et la bonne homotopie

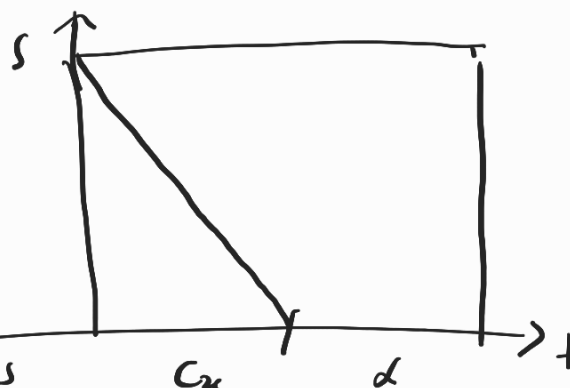
(1)(2)

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \alpha(1-s) & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \\ \alpha(2t-1) & t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$$



(3) h)

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \alpha & t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \alpha \left(\frac{2t-1+s}{1+s} \right) & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \end{cases}$$



4.2 Groupes d'homotopie supérieurs

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^k$$

Def: Si (X, x) est un espace pointé alors

$$\pi_k(X, x) = [(S^k, x_0), (X, x)] = \left\{ \alpha: S^k \rightarrow X \atop x_0 \rightarrow x \right\} / \sim$$

exemple: $k=0$ $S^0 = \{\pm 1\}$ $\alpha: S^0 \rightarrow X$
 $1 \rightarrow x$
 $-1 \rightarrow y$

$$\pi_0(X, x) \xrightarrow{\sim} \{ \text{Comp. Connexes par arcs de } x \}$$

$$[\alpha] \mapsto (\alpha(y))$$

Pour $k \geq 1$, on peut aussi écrire

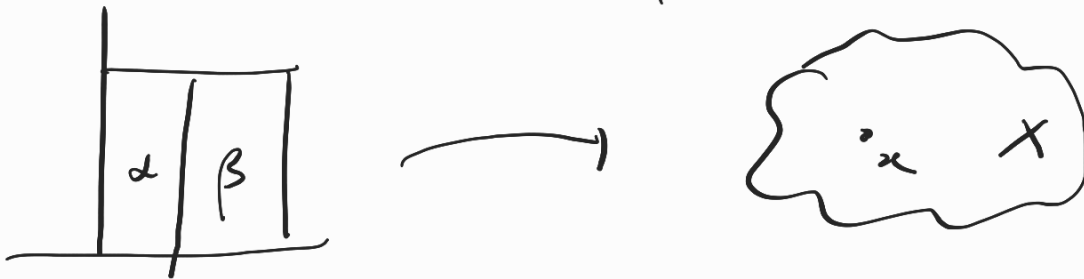
$$\pi_k(X, x) = [(\mathbb{D}^k, S^k) \rightarrow (X, x)]$$

$$= [([0,1]^k, \partial[0,1]^k) \rightarrow (X, x)]$$

En particulier $\pi_1(X, x)$ est bien défini par des lacets.

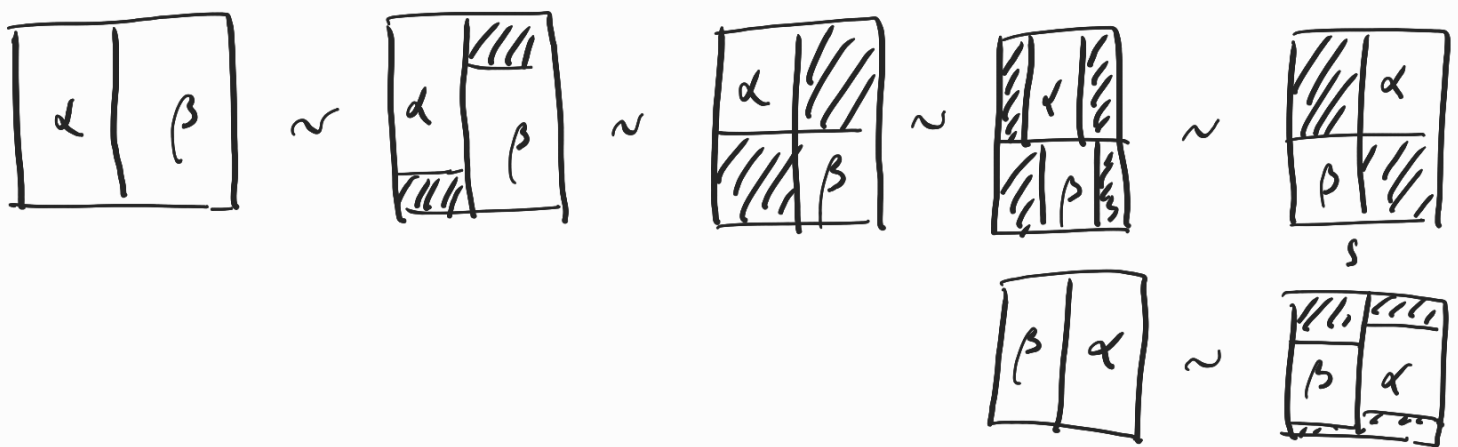
On définit pour $\alpha, \beta: ([0,1]^k, \partial) \rightarrow (X, x)$

$$\alpha \beta(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \alpha(2t_1, \dots, t_k) & \text{si } t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1, \dots, t_k) & \text{si } t_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Les mêmes preuves montrent que la concaténation munit $\pi_k(X, x)$ d'une structure de groupe.

Proposition (Čech, 1931) $\pi_k(X, x)$ est abélien $k \geq 2$



4.3 Fonctorialité des groupes d'homotopie

Soit $\alpha: (S^k, x_0) \rightarrow (X, x)$

et $f: X \rightarrow Y$ continue

on pose $f_* \alpha = f \circ \alpha$

Prop: (1) f_* passe au quotient $f_*: \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, f(x))$

(2) c'est un morphisme de gp si $k \geq 1$

(3) si $g: Y \rightarrow Z$ alors $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$

(4) si $f, f': X \rightarrow Y$ sont homotopes

$\exists \phi: \pi_1(Y, f(x)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, f'(x))$

$$\begin{array}{ccc} & \nwarrow f_* & \nearrow f'_* \\ & \pi_1(X, x) & \end{array}$$

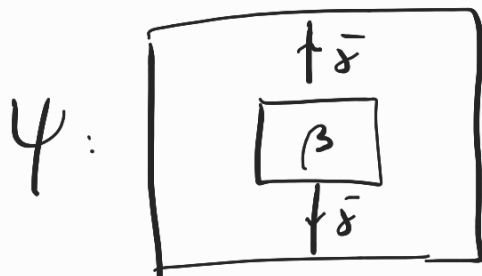
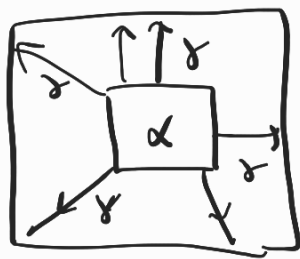
si f et f' sont homotopes rel à x , $\phi = \text{id}$.

Preuve évidente sauf (4)

Posons $\gamma(t) = H(t, x)$ chemin entre $f(x)$ et $f'(x)$

si $\alpha: [0, 1]^k \rightarrow Y$ alors on déf $\phi(\alpha)$
 $\partial[0, 1]^k \rightarrow f(x)$

par



Corollaire: $f: X \rightarrow Y$ equiv. d'homotopie

[alors $f_*: \pi_k(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_k(Y, f(x))$ $\forall k \geq 0$]