Intermède catégorique

Def : une catégorie C est la donnée

- d'un ensemble $Ob(C)$ dont les éléments sont appelés les objets de C
- $\forall x, y \in Ob(C)$ d'un ensemble $Hom_C(x,y)$ dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de x vers y
- un élément $id_x \in Hom_C(x,x)$ $\forall x \in C$
- d'applications de composition $\forall x, y, z \in C$
$$Hom_C(x,y) \times Hom_C(y,z) \to Hom_C(x,z)$$

vérifiant les axiomes suivants : $f \circ id_x = f$ $\quad id_y \circ f = f$
$\forall f \in Hom_C(x,y)$

et $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ $\quad \forall$ $f : x \to y$ $\quad g : y \to z$ $\quad h : z \to t$

L'exemple le plus naturel est Ens dont les objets sont les ensembles et les morphismes les application entre ensembles. ⚠ problème logique de considérer l'ensemble de tous les ensembles cf théorie des univers.

Autres exemples : Gp (objets = groupes, morph. de gpes)
Ab (objets = groupes abéliens)
Ann (objets = anneaux)
Mod_R (objets = R-modules, morph de R-mod)
Top (objets = espace top, morph = app. continues)
Top_* (objets = espaces pointés)
Top_2 (objets = paires d'espaces)

Aussi utile : * étant donné un groupe G

BG = un seul objet $*$ $\mathrm{Hom}_{BG}(*,*) = G$

* E ensemble partiellement ordonné $\mathrm{Ob}_E = E$

$\mathrm{Hom}_E(x,y) = *$ si $x \leq y$

$= \phi$ sinon.

* C^{op} a les mêmes objets et $\mathrm{Hom}_{C^{op}}(x,y) = \mathrm{Hom}_C(y,x)$

Foncteurs : un foncteur $F : C \to D$ entre deux catégories est la donnée d'une application $F : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ et $\forall x,y \in \mathrm{Ob}(C)$ d'application $F : \mathrm{Hom}_C(x,y) \to \mathrm{Hom}_D(F(x), F(y))$ tq $F(id_x) = id_{F(x)}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Bien sûr $id_C : C \to C$ est un foncteur et la composée de deux foncteurs est un foncteur.

ex : un foncteur $F : BG \to \mathrm{Ens}$ est la donnée d'un ensemble muni d'une action de G : $X = F(*)$ $F : G \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,X)$

de même un foncteur $BG \to \mathrm{Mod}_k$ est une "action" représentation linéaire de G.

$F : \mathbb{N} \to \mathrm{Top}$ est la donnée d'une famille d'espaces top $X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots$

On a un foncteur $CC : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$

$X \longrightarrow \{\text{composantes connexes de } X\}$

Et beaucoup de "foncteurs d'oubli" $\mathrm{Gp} \to \mathrm{Ens}$ $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$

$\mathrm{Mod}_k \longrightarrow \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens}$ etc.

On a quelque fois des foncteurs qui "vont dans l'autre sens" par ex : $\mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$S \longmapsto \mathbb{Z}\langle S \rangle$

où $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ est l'ens. des sommes formelles $\sum_{s\in S} a_s s$ avec a_s presque tous nuls et de même $\forall R$ anneau commutatif. Une telle construction existe aussi dans le cas des groupes : $L : Ens \to Gp$

$S \longrightarrow$ groupe libre engendré par S

Formellement, $L(S)$ est l'ens des mots formés avec l'alphabet $\{s, s\in S\}\cup\{s^{-1}, s\in S\}$ et la règle de simplification $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$. On a alors une inclusion $S \hookrightarrow G(S)$ qui induit une bijection $\mathrm{Hom}_{Gp}(L(S), H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Ens}(S, H)$ pour tout groupe H.

<u>Isomorphismes</u> : dans une catégorie C, $f\in \mathrm{Hom}_C(x,y)$ est un isomorphisme si $\exists\, g\in \mathrm{Hom}_C(y,x)$ tq $f\circ g = id_y$ et $g\circ f = id_x$. On peut voir que g est unique et que tout foncteur envoie isomorphisme sur isomorphisme. Deux objets $x, y\in C$ sont dits isomorphes s'il existe un iso $f\in \mathrm{Hom}_C(x,y)$.

<u>Equivalence de catégories</u>

Un foncteur $F : C\to D$ est dit pleinement fidèle si $\forall x,y\in Ob(C)$ $\quad F : \mathrm{Hom}_C(x,y) \to \mathrm{Hom}_D(F(x),F(y))$ est bijectif et essentiellement surjectif si $\forall x\in D\ \exists y\in C$ tq $F(y)\simeq x$.

On peut montrer qu'il existe un foncteur $G : D\to C$ qui est une sorte d'inverse de F, au sens où $F\circ G \simeq id_D$ $\quad G\circ F\simeq id_C$

$\simeq$ à définir.

<u>Exemple 1</u> : on définit Mat_k où k est un corps par

$Ob(\mathrm{Mat}_k) = \mathbb{N}$ $\qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}_k}(n,m) = M_{m,n}(k)$

composition = multiplication matricielle

Alors le foncteur $F: \mathrm{Mat}_k \to \mathrm{Vect}_k$ ← k-espace vect de dim finie
$$n \longmapsto k^n$$
est une équivalence de catégories.

2 Le foncteur $\mathrm{Vect}_k \qquad \mathrm{Vect}_k^{op}$ est une équiv. de catégories.
$$V \longmapsto V^*$$
$$f \in \mathrm{Hom}_k(V,W) \longmapsto f^* \in \mathrm{Hom}_k(W^*,V^*)$$

3 Notons pour B connexes par arcs, loc. con. p. arcs, délaçable

Rev_B la catégorie des revêtements de B

et pour un groupe G $\quad G$-Ens la catégorie des ens munis d'une action de G.

$\forall b \in B$, $\qquad \mathrm{Rev}_B \longrightarrow \pi_1(B,b)\text{-Ens}$
$$\{p: X \to B\} \longmapsto p^{-1}(b)$$
est une équivalence de catégories.

Produits et coproduits

Dans une catégorie C quelconque, étant donnés une famille d'objets $(x_i)_{i\in I}$, on dit que y est le produit $\prod_{i\in I} x_i$ s'il existe $p_i : y \to x_i \ \forall i$ tq

$\forall z \in \mathrm{Ob}(C)$ avec $q_i : z \to x_i \quad \exists! f: z \to y$

tq $\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "q_i"'] & y \arrow[d, "p_i"] \\ & x_i \end{tikzcd}$$

Remarque : s'il existe y est défini à un morphisme unique près

exemple : dans la catégorie Ens, Top, Mod_k, il s'agit des produits qu'on connaît.

Il y a bien sûr la notion de coproduit :

étant donné $(x_i)_{i\in I}$ il s'agit de y, noté $\coprod_{i\in I} x_i$

avec des apps $\varphi_i : x_i \to y$ tq $\forall z$, $\psi_i : x_i \to z$

$\exists!\, g : y \to z$ tq
$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] & z \\ x_i \arrow[u, "\varphi_i"] \arrow[ur, dotted, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

dans les catégories Ens, Top, $Mod_{\mathbb{Z}}$ il s'agit de la réunion disjointe et de la somme directe.

Produit fibré et somme amalgamée

étant donné deux morphismes
$$\begin{tikzcd} & y \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"'] & z \end{tikzcd}$$

le produit fibré est un objet t avec commutatif
$$\begin{tikzcd} t' \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] \arrow[drr, bend left] & & \\ & t \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ & x \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

tq $\forall t'\ \exists!\ t' \to t$ comme ds le diag.

dans les catégories Ens, Top, Gp il s'agit toujours de

$$X \times_Z Y = \{ (x,y) \in X\times Y \text{ tq } f(x) = g(y) \}$$

On a la notion duale de somme amalgamée
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ z \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & t \arrow[dr] & \\ & & t' \end{tikzcd}$$

alors la somme amalgamée est un objet t avec commutatif tq $\forall t'\ \exists\ t \to t'$

Dans la catégorie Ens Top il s'agit de

$$Y \sqcup Z /_{f(x) \sim g(x)} \quad x \in X.$$

On va nécessiter cette opération dans la cat. des groupes.

Prop: $\forall$
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \\ G_2 & \end{tikzcd}$$
$\exists$ un produit amalgamé noté $G_1 *_H G_2$

qui vérifie $\mathrm{Hom}_{gp}(G_1 *_H G_2, G) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \in \mathrm{Hom}_{gp}(G_1, G) \\ \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{gp}(G_2, G) \\ \text{tq} \quad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ G_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & G \end{array} \end{array} \right\}$

<u>Construction</u> : on définit $G_1 * G_2$ comme quotient de $L(G_1 \sqcup G_2)$ par le sous gp distingué engendré par

$$i_1(h)\, i_2(h)^{-1} \quad \forall h \in H$$
$$g.g'.(gg')^{-1} \quad \forall g, g' \in G_1$$
$$gg'(gg')^{-1} \quad \forall g, g' \in G_2$$

2.3 Thm de Van Kampen

Soit B connexe et loc. conn. par arcs, $B = U_1 \cup U_2$ où U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont des ouverts connexes.
On fixe $x \in U_1 \cap U_2$: alors

$$\pi_1(B, x) = \pi_1(U_1, x) \underset{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)}{*} \pi_1(U_2, x)$$

<u>Preuve</u> : on suppose en plus $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ délaçables.
On se donne G avec $\varphi_1 : \pi_1(U_1, x) \to G$, $\varphi_2 : \pi_1(U_2, x) \to G$ coïncidant sur $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$

On veut alors prouver qu'il existe un unique $\varphi : \pi_1(B, x) \to G$ compatible

<u>Unicité</u> : il suffit de montrer que $\pi_1(U_1, x)$ et $\pi_1(U_2, x)$ engendrent $\pi_1(B, x)$. Pour cela on fixe $\gamma : [0,1] \to B$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$

Par compacité de $[0,1]$, $\exists n$ tq $\gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subset U_{f(k)}$ pour une certaine fonction $f : \{0, \dots, n-1\} \to \{1, 2\}$

Posons $\beta_k : [0,1) \longrightarrow \quad k) \qquad$ et $\alpha_k : [0,1) \to U_1 \cap U_2$

$\qquad\quad t \longrightarrow \quad \frac{+t}{n}) \qquad$ tq $\alpha_k(0) = x$, $\alpha_k(1) = \gamma(\frac{k}{n})$

On a alors $\gamma \sim \beta_0 \cdots \beta_{n-1} \sim \underbrace{\beta_0 \bar{\alpha}_1}(\underbrace{\alpha_1 \beta_1 \bar{\alpha}_2}) \alpha_2 \cdots \bar{\alpha}_{n-1}(\alpha_{n-1} \beta_{n-1})$

chaque facteur est soit dans U_1, soit dans U_2.

<u>Existence</u> On veut construire un morphisme $\varphi : \pi_1(B, x) \to G$ compatible avec φ_1 et φ_2

c'est intéressant d'interpréter un tel morphisme en terme de revêtements :

Un G-fibré principal $p : P \longrightarrow B$ est un revêtement sur lequel G agit librement transitivement sur les fibres. Si on fixe $x \in P$

$x \cdot \gamma = \rho(\gamma) x$ définit un morphisme

car $x \cdot (\gamma \delta) = (x \cdot \gamma) \cdot \delta = [\rho(\gamma) \cdot x] \delta = \rho(\gamma) \rho(\delta) x$

On veut donc construire un tel fibré sur B :

On en a un sur U_1 par φ_1, un sur U_2 par φ_2

et leurs restrictions à $U_1 \cap U_2$ sont isomorphes

on les recolle et le tour est joué !

<u>Exemple</u> : $\pi_1 S^n = 0$ pour $n \geq 2$ car

$S^n = U_1 \cup U_2 \qquad U_1 = S^n \setminus N \qquad U_2 = S^n \setminus S$

$U_1 \cap U_2 \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ connexe par arcs.

$\pi_1(S^n)$ est alors engendré par $\pi_1(U_1)$ et $\pi_1(U_2)$

qui sont tous les deux triviaux.

Groupes de présentation finie :

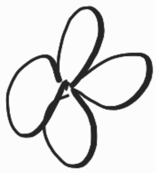
Une présentation d'un groupe est la donnée de Σ et R où Σ est un ensemble, $R \subset L(\Sigma)$ tel que $G \simeq L(\Sigma)/_{\langle R \rangle}$ où $\langle R \rangle$ est le plus petit sous-groupe normal contenant R.

G est de présentation finie si on peut prendre Σ et R finis.

Thm. Si X est un CW complexe fini et $x \in X$ alors $\pi_1(X,x)$ est de présentation finie.

Preuve : on peut supposer X connexe par arcs

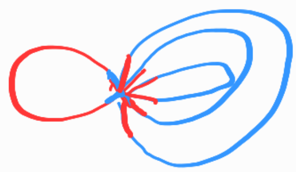
Etape 1 : X est un bouquet de n cercles.



on peut choisir x = unique 0-cellule

$n=1$ $\quad X = S^1 \quad \pi_1 X = \mathbb{Z}$

$n \geq 2$ $\quad$ van Kampen



U = rouge
V = bleu

$U \cap V$ contractile $\quad U \simeq S^1 \quad V$ = bouquet de $n-1$ cercles

Van Kampen $\Rightarrow \pi_1 X = \mathbb{Z} * F_{n-1} = F_n$.

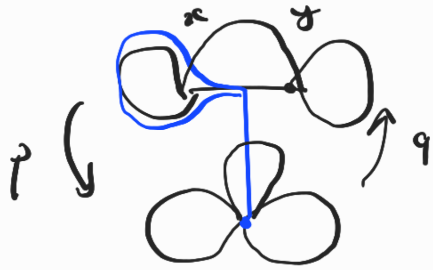
Etape 2 $\quad X$ est de dimension 1

s'il n'y a qu'une 0-cellule, on est à l'étape 1. Sinon $\exists\ x \neq y$ deux 0-cellules reliés par une arête e.

on considère $Y = X/e$ (arête écrasée en un point)

il suffit de montrer que $p : X \to Y$ est une équiv. d'homotopie. Pour ça on construit un inverse homotopique. $q(p(z)) = z$ si z n'est pas sur une arête reliée à x ou y. $q(e) =$ milieu de e

chaque arête f reliant e on la découpe en plusieurs intervalles (2 ou 3) et on parcourt la même arête + la moitié de e qu'il convient.



On vérifie que $p\circ q$ et $q\circ p$ sont homotope à l'id.

Etape 3 On procède par récurrence sur le nb de cellules. ajouter des cellules de dim ≥ 2 ne change pas le gp fondamental (Van Kampen) - tandis que l'ajout d'une 2-cellule ajoute une relation.

Corollaire Toute variété top. compacte X a un groupe fondamental de présentation finie.

Preuve : on rappelle que pour un tel X $\exists\, Y$ CW-complexe fini tq $X \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} Y$ $r\circ i = id_X$

En appliquant le foncteur π_1 on voit que $\pi_1(X)$ est un retract de $\pi_1(Y)$ au sens des groupes.

Lemme : Soit $H < G$ tq $\exists\, r : G \to H$ $r|_H = id$ alors si G est de présentation finie, H aussi.

$G = L(\Sigma)/\langle R\rangle \qquad \Sigma = \{z_i\} \qquad R = \{r_j\}$

On va montrer que $H = L(\Sigma)/\langle R, r(z_i)z_i^{-1}\rangle$

Pour cela il suffit de prouver que pour tout groupe K on a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}(H,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L(\Sigma)/\langle R, r(z_i)z_i^{-1}\rangle, K)$$

$$= \{f : L(\Sigma) \to K,\ f(r_j) = 1,\ f(r(z_i)) = f(z_i)\}$$

$$= \{f : G \to K,\ f(r(z_i)) = f(z_i)\}$$

$$G \to H \to K$$

$$= \{f : G \to K \quad f \circ r = f\}$$

$$= \{f : H \to K\}$$

<u>Exemple</u> Van Kampen

$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle a, b, c, d \mid$

$bd = cb$

$ca = bc$

etc