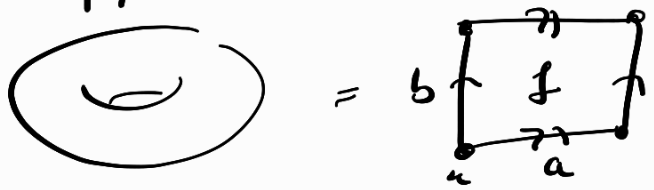
Chapitre III Homologie

I Intermède d'algèbre homologique

A partir d'un CW complexe X, on va fabriquer une famille $C_k(X)$ de groupes abéliens dans laquelle $C_k(X)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les k-cellules de X. On définira $\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$

où $\partial_k(e) = \sum c_{e,f} f$ où $c_{e,f}$ est le "nombre de fois" où f apparaît dans le bord de e.

Exemple :



$$C_0 = \mathbb{Z}x \xleftarrow{\partial_1} C_1 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b \xleftarrow{\partial_2} C_2 = \mathbb{Z}f$$

$$\partial_1 a = \partial_1 b = 0 \quad \partial_2 c = 0$$

On définit alors $H_k(X) = \operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}$

On va prouver que $H_k(X)$ est invariant par homéo
mieux homotopie
"fonctoriel".

On commence par des généralités d'algèbre homologique.

Def: un complexe de chaîne est une suite $(C_k)_{k \geq 0}$ de groupes abéliens avec $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \qquad \text{et } \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

on pose $C_k = 0$ si $k < 0$ et $\partial_0 = 0$.

Un morphisme de complexes $f_*: C_* \to C'_*$ est la donnée de morphismes $f_n: C_n \to C'_n$ tq
$f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$ $\forall n$ ie

$$\begin{tikzcd}
0 & C_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_0"'] & C_1 \arrow[l] \arrow[d] & C_2 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
0 & C'_0 \arrow[l] & C'_1 \arrow[l] & C'_2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Def Pour un complexe C_* on note

$Z_n = \mathrm{Ker}(\partial_n : C_n \to C_{n-1})$ n-cycles

$B_n = \mathrm{Im}(\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n)$ n-bords

$H_n = Z_n / B_n$ le nième groupe d'homologie

Si on a $f_*: C_* \to C'_*$ un morphisme de complexes

alors $f(Z_n) \subset Z'_n$ $\quad \partial'(x) = f\partial x = 0$

et $f(B_n) \subset B'_n$ $\quad f(\partial x) = \partial' f x$

donc $\exists$ $H_n(f): H_n(C) \to H_n(C')$

$[x] \mapsto [f(x)]$

Def: deux morphismes $f, g : C_* \to D_*$ sont dits homotopes s'il existe une suite $k_n : C_n \to C'_{n+1}$ tq $\partial_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$ $\quad \partial' K + K\partial = f - g$

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & C_n \arrow[l, "\partial_n"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "k_{n-1}"] & C_{n+1} \arrow[l, "\partial_{n+1}"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "k_n"] \\
C'_{n-1} & C'_n \arrow[l, "\partial'_n"'] & C'_{n+1} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Lemme : Si f et g sont homotopes alors $H_n(f) = H_n(g)$

Preuve : $x \in Z_n$ $\qquad f_n(x) - g_n(x) = \underbrace{\partial'_{n+1} k_n(x)}_{\in B'_n} + k_{n-1} \underbrace{\partial_n x}_{=0}$

donc $[f_n(x)] = [g_n(x)]$

Def : une suite exacte courte $0 \to A_* \xrightarrow[f]{} B_* \xrightarrow[g]{} C_* \to 0$ de complexes est la donnée de deux morph f, g tq $\forall n$ $\quad 0 \to A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \to 0$ est exacte

ie $\ker f_n = 0$ $\quad \mathrm{Im}\, g_n = C_n$ $\quad \ker g_n = \mathrm{Im}\, f_n$.

Prop : Étant donnée une telle suite $\exists\, \delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ tq

$$\cdots \to H_{n+1}(C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \to H_n(B) \to H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

est une suite exacte longue

Def de δ_n : $x \in Z_n(C)$ représente $[x] \in H_n(C)$

$\exists\, y \in B_n$ tq $g_n(y) = x$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r] & B_{n-2} \arrow[r] & C_{n-2} &
\end{tikzcd}$$

$z = \partial_B y$

$g_{n-1} z = \partial_C x = 0$

donc $\exists\, t \in A_{n-1}$

$f_{n-1} t = z$

On pose

$\delta_n[x] = [t]$

. . . .

On montre ensuite l'exactitude en $H_n(A)$

$H_n(B)$ et $H_n(C)$.

Par exemple $H_n(B)$ on a bien $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = 0$.

Preuve si $x \in Z_n(B) \to 0 \in H_n(C)$

$$\begin{array}{ccc} w & \longrightarrow & y \; C_{n+1} \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ x\, B_n & \xrightarrow{z} & C_n \\ \downarrow \quad \downarrow & & \\ 0 \quad B_{n-1} & & \end{array}$$

$x - \partial w \in A_n$.

etc, etc...

<u>Dernier point utile</u> : si on a deux suites exactes longues

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et des morphismes entre elles, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\alpha)"] & H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & H_n(C) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ H_{n+1}(C') \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r] & H_n(B') \arrow[r] & H_n(C') \arrow[r] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \end{tikzcd}$$

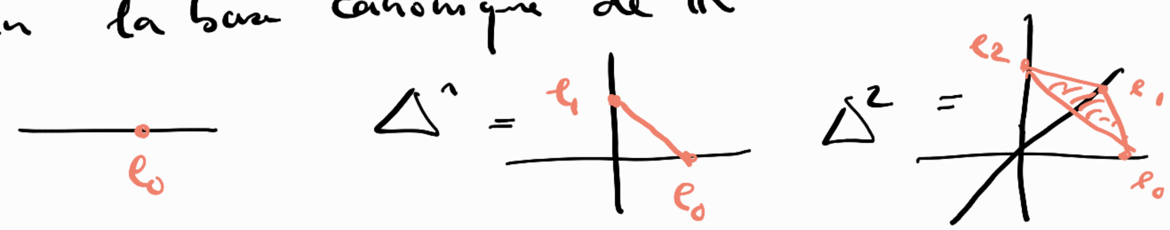
II Homologie singulière

1. Définition

On note $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1\}$

le simplexe standard. C'est l'enveloppe convexe de $e_0, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Delta^0 =$ $\Delta^1 =$ $\Delta^2 =$



Par définition, les faces de Δ_n sont les images des application $\delta^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$

$$(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$$

def : soit X un espace top. Un simplexe singulier de dim n est une app. continue $\sigma : \Delta^n \to X$

Soit Π un gp abélien. On pose

$C_n(X;\Pi) = \bigoplus_{\sigma : \Delta^n \to X} \Pi$ le groupe abélien formé des sommes formelles finis $\sum m_j \cdot \sigma_j$ avec $m_j \in \Pi$, $\sigma_j : \Delta^n \to X$

def le bord de $\sigma : \Delta^n \to X$ est par def

$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \, \sigma \circ \delta^i$. On le prolonge en un morphisme

$\partial_n : C_n(X;\Pi) \to C_{n-1}(X,\Pi)$ par $\partial(\sum m_j \sigma_j) = \sum m_j \, \partial_n \sigma_j$

Lemme : $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

<u>preuve</u> $\partial_{n-1} \circ \partial_n \sigma = \partial_{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta^i = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \delta^i \circ \delta^j$

pour $i \leq j$ $\quad \delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i : \Delta^{n-2} \to \Delta^n$

Comme ils sont affectés de signes opposés, la somme s'annule.

def le complexe des chaînes singulières à coefficients dans Π est $C_*(X,\Pi) = (C_n(X,\Pi), \partial_n)$.

L'homologie singulière de Π est notée $H_*(X,\Pi)$.

<u>Deux calculs simples</u> :

$H_0(X,\Pi) = \bigoplus_{\substack{\text{comp. connexes} \\ \text{par arcs de } X}} \Pi$

$H_k(*,\Pi) = \Pi$ si $*=0$
$= 0$ sinon.

Preuves : ① $H_0(X,\Pi) = C_0(X,\Pi) / \partial_1 C_1(X,\Pi) \longrightarrow \bigoplus \Pi$

$\sigma_0 : \Delta^0 \to \Pi \longmapsto [\sigma_0(\Delta^0)]$

$\forall \ \sigma_1 : \Delta^1 \to \Pi$

$\partial \sigma_1 = y - x \longmapsto [y] - [x] = 0$

② on a $C_n(*,\Pi) = \Pi$ car il n'y a qu'un seul simplexe en chaque dim.

$$\partial_n \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \underbrace{\sigma_n \circ \delta^i}_{= \sigma_{n-1}} = \sigma_{n-1} \times \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow C_3 \leftarrow \cdots$$

$$\Pi \xleftarrow{0} \Pi \xleftarrow{id} \Pi \xleftarrow{0} \Pi \xleftarrow{id} \cdots$$

d'où $H_0 = \Pi$ et $H_k = 0$ si $k > 0$.

2. Propriétés de base

- **Fonctorialité** si $f : X \to Y$ est continue

on pose $f_* : C_n(X,\Pi) \longrightarrow C_n(Y,\Pi)$

$$\sum m_j \sigma_j \longmapsto \sum m_j \, f \circ \sigma_j$$

On a bien $f_*(\partial_n \sigma) = f_* \sum (-1)^i \sigma \circ \delta^i = \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ \delta^i$

$= \partial_n (f_* \sigma)$ ainsi f_* est un morphisme de complexes

et donc induit $H_n(f) : H_n(X,\Pi) \xrightarrow{f_*} H_n(Y,\Pi)$

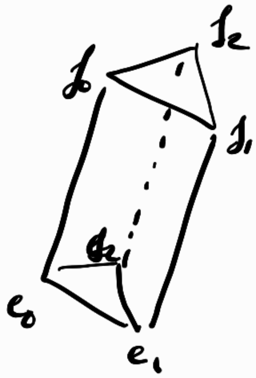
- **invariance par homotopie**

Prop : si $f, g : X \to Y$ sont homotopes alors $f_* = g_*$: $H_n(X,\Pi) \to H_n(Y,\Pi)$.

Corollaire : si $f : X \to Y$ équiv. d'homotopie $f_* = \text{iso}$

si X est contractile $H_n(X,\Pi) \simeq H_n(*,\Pi) = 0 \quad n > 0$

Preuve: soit $H : [0,1]\times X \to Y$ l'homotopie entre f et g et $\sigma : \Delta_n \to X$ un simplexe singulier, on considère



$H\circ(id\times\sigma) : [0,1]\times\Delta_n \to Y$

son image est un prisme dans Y que l'on va "trianguler" ie découper en simplexes de dim $n+1$.

$\forall i \in \{0,\dots,n\}$ on pose $P_{n,i} : \Delta^{n+1} \longrightarrow [0,1]\times\Delta^n$

$$(t_0,\dots,t_n) \mapsto t_0 e_0 + \dots + t_i e_i + t_{i+1} f_{i+1} + \dots + t_n f_n$$

puis on note $h_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i H\circ(id\times\sigma)\circ P_{n,i}$

On veut prouver que $h_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n+1}(Y,\mathbb{Z})$ forme une homotopie entre $f_\#$ et $g_\#$ ie "$\partial h + h\partial = g - f$"

ce qui signifie $\underbrace{\partial_{n+1} h_n(\sigma)}_{\text{bord du prisme}} + \underbrace{h_{n-1}}_{\text{côtés du prisme}}\partial_n\sigma = \underbrace{g}_{\text{face du dessus}}\circ\sigma - \underbrace{f}_{\text{face de dessous}}\circ\sigma$

on y va: $\partial_n h_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=j}^{n} (-1)^{i+j} H\circ(id\times\sigma)\circ P_{n,i}\circ\delta^j$

terme $i=j=0$: $g\circ\sigma$

terme $i=n,\ j=n+1$: $f\circ\sigma$

termes $(i,j)=(k,k)$ $(i,j)=(k-1,k)$ se compensent

$P_{n,k}\circ\delta^k = P_{n,k-1}\circ\delta^k$ et signes opposés

autres termes sont ceux apparaissant dans $-P_n\partial_n(\sigma)$.

Homologie relative

Soit $A \subset X$ un sous espace et Λ un groupe abélien

on a une inclusion $C_n(A,\Lambda) \hookrightarrow C_n(X,\Lambda)$

+ morph de complexes $\qquad \sigma \longmapsto \sigma$

et on pose $C_n(X,A;\Lambda) = C_n(X,\Lambda)/C_n(A,\Lambda)$

<u>def</u> : c'est le complexe de chaînes singulières de la paire

son homologie est notée $H_n(X,A;\Lambda)$.

La suite exacte $0 \to C_*(A,\Lambda) \to C_*(X,\Lambda) \to C_*(X,A,\Lambda) \to 0$

induit une suite exacte longue

$$\cdots \to H_{n+1}(A,\Lambda) \to H_n(A,\Lambda) \to H_n(X,\Lambda) \to H_n(X,A,\Lambda) \to H_{n-1}(A,\Lambda) \to \cdots$$

<u>def</u> : si $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une app. continue

elle induit $\quad f_* : C_*(X,A,\Lambda) \to C_*(Y,B,\Lambda)$

puis $\quad f_* : H_*(X,A,\Lambda) \to H_*(Y,B,\Lambda)$

<u>Prop</u> : si f et g sont homotopes $: (X,A) \to (Y,B)$

alors $f_* = g_*$

<u>preuve</u> : la même que à la section précédente.

<u>Généralisation</u> : si on a $B \subset A \subset X$

alors on a une surjection $C_*(X,B) \to C_*(X,A)$

$$C_*(X)/C_*(B) \to C_*(X)/C_*(A)$$

dont le noyau est $C_*(A)/C_*(B)$

on en tire une suite exacte longue

$$\cdots \to H_{n+1}(X,A) \to H_n(A,B,\Lambda) \to H_n(X,B,\Lambda) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,B,\Lambda) \to \cdots$$

Structure de module

Si Π est un R-module avec R anneau commutatif alors tous les groupes $C_*(X, A, \Pi)$, $H_*(X, A, \Pi)$ sont des R-modules et toutes les app. f_*, ∂_n sont R linéaires.

Typiquement si $\Pi = k$ un corps alors l'homologie singulière à coeffs dans k est un k espace vectoriel.