III Mayer-Vietoris & Excision

1. Théorème des petites chaînes

Soit $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X tq $\bigcup_{i\in I} \mathring{U}_i = X$. On note

$$C_n^{\mathcal{U}}(X,\Pi) = \left\{ \sum m_j\sigma_j \in C_n(X,A) \text{ tq } \forall j\ \exists i\in I \text{ tq } \operatorname{im}\sigma_j\subset U_i \right\}$$

On observe que ces groupes forment un complexe pour la différentielle usuelle et on note $H_*^{\mathcal{U}}(X,\Pi)$ son homologie.

Thm: le morphisme d'inclusion $i: C_n^{\mathcal{U}}(X,\Pi)\to C_n(X,\Pi)$ induit un isomorphisme $H_n(i): H_n^{\mathcal{U}}(X,\Pi) \xrightarrow{\sim} H_n(X,\Pi)$

preuve: on simplifie en posant $\Pi=\mathbb{Z}$ (cela ne change rien).

Subdivision barycentrique

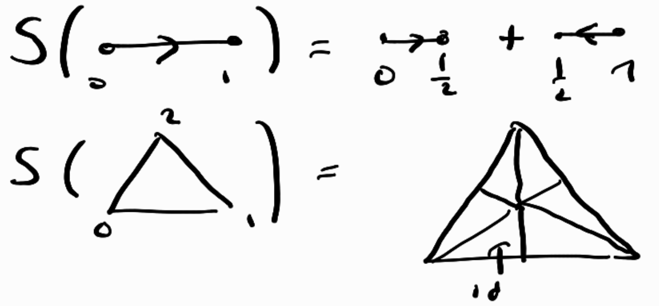
$\forall \alpha\in S_{n+1}$ on note $s_\alpha: \Delta^n\to\Delta^n$ l'unique application affine envoyant $e_0,\dots,e_n$ sur $e_{\alpha(0)}, \frac{e_{\alpha(0)}+e_{\alpha(1)}}{2},\dots,\frac{e_{\alpha(0)}+\dots+e_{\alpha(n)}}{n+1}$

si $\sigma:\Delta^n\to X$ est un simplexe on pose

$$S_n(\sigma)=\sum_{\alpha\in S_{n+1}}\varepsilon(\alpha)\,\sigma\circ s_\alpha$$ qu'on étend par linéarité à

$$\begin{aligned} C_n(X,\Pi) &\longrightarrow C_n(X,\Pi) \\ \sum m_j\sigma_j &\longmapsto \sum m_j S_n(\sigma_j) \end{aligned}$$

ex :



Un calcul direct montre que $S_n \circ \partial_{n+1} = \partial_n \circ S_n$

Sur le dessin : le bord de la subdivision = la subdivision du bord.

S est homotope à l'identité

On construit $h_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n+1}(X,\mathbb{Z})$ tel que

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = Id - S_n$$
$$h_n \circ f_* = f_* \circ h_n \qquad \forall f : X \to Y.$$

On construit h_n par récurrence sur n en posant $h_0 = 0$.

Soit $n \geq 1$ et appliquons l'hypothèse de récurrence à $\partial_n i_n$ où $i_n : \Delta_n \to \Delta_n$ désigne l'identité : on a

$$\partial_n h_{n-1} \partial_n i_n + h_{n-2} \underbrace{\partial_{n-1} \partial_n}_{0} i_n = \partial_n i_n - \underbrace{S_{n-1} \partial_n}_{\partial_n S_n} i_n$$

d'où $\partial_n \left[i_n - h_{n-1} \partial_n i_n - S_n \, i_n \right] = 0$

Comme Δ_n est contractile $H_n(\Delta_n, \mathbb{Z}) = 0$ et il existe $\tau_{n+1} \in C_{n+1}(\Delta_n, \mathbb{Z})$ tq $i_n - S_n i_n - h_{n-1} \partial_n i_n = \partial_{n+1} \tau_{n+1}$. $(*)$

Pour $\sigma : \Delta_n \to X$ simplexe on pose $h_n(\sigma) = \sigma_* \tau_{n+1}$ puis on étend h_n par linéarité.

En appliquant σ_* à $(*)$ on trouve

$$\sigma - S_n \sigma - h_{n-1} \partial_n \sigma = \partial_{n+1} h_n \sigma$$ car σ_* commute à ∂, S, h !

De plus par construction : si $f : X \to Y$ alors $f_* h_n(\sigma) = f_* \sigma_* \tau_{n+1} = (f \circ \sigma)_* \tau_{n+1} = h_n(f_* \sigma)$

S^k est homotope à l'identité

virons les n pour plus de lisibilité et posons

$$h^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} h S^i$$ de sorte que

$$\partial h^{(k)} + h^{(k)}\partial = \sum_{i=0}^{k-1} (\partial h S^i + h S^i \partial) = \sum (\partial h + h\partial) S^i$$
$$= \sum_{i=0}^{k} (1-S) S^i = 1 - S^k$$

Montrons que $\forall \sigma : \Delta^n \to X$ $\exists k \geq 0$ tq $S^k \sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z})$.

Posons $V_i = \sigma^{-1}(\mathring{U}_i)$. Les V_i forment un recouvrement ouvert du compact Δ^n donc $\exists \varepsilon > 0$ tq toute boule de rayon ε est dans l'un des V_i. Or

$S_n^k \sigma_i$ est combinaison de $\sigma \circ S_{\alpha_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_k}$ $\alpha_i \in S_{n+1}$.

L'image de $S_{\alpha_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_k}$ a pour diamètre $\leq \operatorname{diam} \Delta^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^k < \varepsilon$ pour k assez grand en vertu du

<u>Lemme</u> : $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^q$

$$\operatorname{diam} \operatorname{Conv}\left(x_0, \frac{x_0 + x_1}{2}, \dots, \frac{x_0 + \cdots + x_n}{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam} \operatorname{Conv}(x_0, \dots, x_n)$$

ainsi chaque terme dans $S^k \sigma$ est dans l'un des $\mathring{U}_i$.

Conclusion

On veut montrer que $C_n^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} C_n(X, \mathbb{Z})$

induit un iso $H_n^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$

<u>montrons la surjectivité</u> : $x = [\sum m_j \sigma_j]$ $\quad \partial x = 0$

on prend k assez grand pour que $S^k \sigma_j \in C_n^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z})$

Comme $\partial h^{(k)} x + \underbrace{h^{(k)} \partial x}_{0} = x - S^k x$

on voit que $[x] = [S^k x]$ et $S^k x \in C_n^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z})$.

<u>montrons l'injectivité</u> : soit $x \in C_n^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z})$ $\quad \partial x = 0$

et supposons $[ix] = 0$ ie $x = \partial y$ avec $y \in C_{n+1}(X, \mathbb{Z})$

idem $\exists k$ tq $S^k y \in C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z})$ et on a

$$y - S^k y = h^{(k)} \partial y + \partial h^{(k)} y \quad \text{on applique } \partial$$

$$\underbrace{\partial y}_{x} - \underbrace{S^k \partial y}_{\underbrace{\partial S^k y}_{C_n^{\mathcal{U}}}} = \underbrace{\partial h^{(k)} \underbrace{\partial y}_{x}}_{C_n^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})} + \underbrace{\partial\partial h^{(k)} y}_{0}$$

on tire que $x = \partial[\underbrace{S^k y + h^{(k)} \partial y}_{\in C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})}] \Rightarrow [x] = 0$ ds $H_n^{\mathcal{U}}$

2. Mayer-Vietoris

<u>Thm</u> Soit X un espace top, $U, V \subset X$ tq $X = \mathring{U} \cup \mathring{V}$

on note $i : U \to X$ $\quad \alpha : U \cap V \to U$ les inclusions

$j : V \to X$ $\quad \beta : U \cap V \to V$

Alors $\exists$ une suite exacte longue à coeff ds Π

$$H_{n+1}(X) \to H_n(U \cap V) \xrightarrow[\alpha_* - \beta_*]{} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow[i_* + j_*]{} H_n(X) \to H_{n-1}(U \cap V) \to \cdots$$

<u>preuve</u>: on pose $\mathcal{U} = \{U, V\}$ et on observe qu'on a une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_n(U \cap V, \Pi) \xrightarrow[\alpha_* - \beta_*]{} C_n(U) \oplus C_n(V) \to C_n^{\mathcal{U}}(X, \Pi) \to 0$$

Celle-ci induit une suite exacte longue : il n'y a qu'à remplacer $H_n^{\mathcal{U}}(X, \Pi)$ par $H_n(X, \Pi)$ pour obtenir M.V.

3. Excision

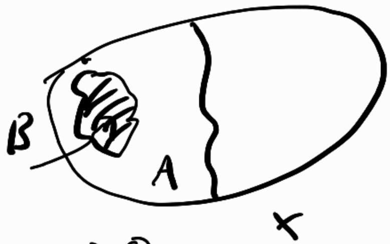
<u>Thm</u>: soit $B \subset A \subset X$ tq $\overline{B} \subset \mathring{A}$

alors l'inclusion $(X \setminus B, A \setminus B) \to (X, A)$

induit un isomorphisme en homologie

$$H_n(X \setminus B, A \setminus B, \Pi) \xrightarrow{\sim} H_n(X, A, \Pi)$$

Preuve par hypothèse $\mathcal{U} = \{X \setminus B, A\}$ vérifie les petites chaînes.



$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & C^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \overset{C}{C^{\mathcal{U}}(X)/C(A)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(A) \arrow[r] & C(X) \arrow[r] & \underset{D}{C(X)/C(A)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit

$$\begin{tikzcd}
H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & H_n(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & H^{\mathcal{U}}_{n-1}(X) \arrow[d, "\sim"] \\
H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(D) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

le lemme des cinq dit que $\phi_*: H_n(C) \to H_n(D)$ est un iso $\forall n$.

or $C = C_*(A) + C_*(X \setminus B)/C_*(A) = C_*(X\setminus B)/C_*(A \setminus B)$

on a donc $\Phi_*: H_n(X \setminus B, A \setminus B, \Pi) \xrightarrow[\sim]{} H_n(X, A, \Pi)$

4. Homologie des sphères

Thm : prenons $n>0$ et Π gp abélien

$$H_k(S^n, \Pi) = \begin{cases} \Pi & \text{si } k=0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

preuve : pour $n=0$ on a déjà $H_k(S^0,\Pi) = \begin{cases} \Pi \oplus \Pi & k=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On applique Mayer-Vietoris à $S^n = \underset{S^n\setminus\{N\}}{U} \cup \underset{S^n\setminus\{S\}}{V}$

de sorte que $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\} \underset{\text{homot.}}{\simeq} S^{n-1}$

cas $n=1$:

$$0 \to H_1(S^1, \Pi) \to H_0(S^0) \to H_0(U) \oplus H_0(V)$$

$$\Pi \oplus \Pi \to \Pi \oplus \Pi$$

$$(x, y) \mapsto (x-y, x-y)$$

$\Rightarrow H_1(S^1, \Pi) \simeq \Pi$

Cas $n \geq 1$

$$\underbrace{\cancel{H_n(U) \oplus H_n(V)}}_{0} \to H_n(S^n) \underset{\sim}{\to} H_{n-1}(S^{n-1}) \to \underbrace{\cancel{H_{n-1}(U)}}_{0} \oplus \underbrace{\cancel{H_{n-1}(V)}}_{0}$$

$$0 \to H_k(S^k) \to H_{k-1}(S^{k-1}) \to 0$$

$$0 < k \leq n$$

5. Invariance de la dimension

<u>Th</u> Soit M et N deux variétés topologiques de dimension m et n. Si M et N sont homéomorphes alors $m=n$.

<u>preuve</u>: soit $f: M \to N$ un homéo et $x \in M$

alors $f_*: H_k(M, M \setminus x, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_k(N, N \setminus f(x), \mathbb{Z})$

$$\text{is}$$

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{Z})$$

or $H_k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) = H_k(S^{n-1}, \mathbb{Z})$ et la suite de la paire montre $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on en déduit $m=n$!