6. Théorème de Jordan-Brouwer

Thm : Soit $0 \leq m < n$ et $f : S^m \to S^n$ un homéo sur son image. Alors

$$H_k(S^n \setminus f(S^m), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \text{si } k=0 \text{ et } m=n-1 \\ \mathbb{Q} & \text{si } m<n-1 \text{ et } k=0 \text{ ou } n-m-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire : si $f : S^{n-1} \to S^n$ est un homéo sur son image alors $S^n \setminus f(S^{n-1})$ a deux composantes connexes par arcs (rque idem pour composantes connexes)

Prop : Soit $0 \leq m \leq n$ et $f : [0,1]^m \to S^n$ homéo sur son image. Alors $H_k(S^n \setminus f([0,1]^m), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Preuve du fait que Prop $\Rightarrow$ thm

On fait une récurrence sur m.

$m=0$ on a $S^n \setminus f(S^0) \simeq S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq S^{n-1}$.

Prenons $m \geq 1$ et appliquons Mayer-Vietoris avec

$$S^n \setminus f(S^m) = \underset{\substack{\| \\ S^n \setminus f(\text{hémisphère nord})}}{U} \cap V = S^n \setminus f(\text{hémisphère sud})$$

de sorte que $U \cup V = S^n \setminus f(\underset{\substack{\| \\ S^{m-1}}}{\text{équateur}})$

Par la proposition, on connait $H_*(U)$ et $H_*(V)$

Par hypothèse de récurrence, on connait $H_*(U \cup V)$.

Cela suffit pour déterminer $H_k(U \cap V, \mathbb{Q})$!

Regardons $k=0$ et $m=n-1$

$$\begin{matrix} H_1(U) \\ \oplus H_1(V) \end{matrix} \to H_1(U \cup V) \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(U \cup V) \to 0$$

$0 \to \mathbb{Q} \to ? \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0$

La somme alternée des dimensions fait 2 $\Rightarrow \dim H_0(U\cap V) = 2$

<u>Preuve de la proposition</u>

A nouveau on fait une récurrence sur m.

Pour $m=0$ $\quad S^n \setminus f([0,1]^m) \simeq \mathbb{R}^n$ est contractile. v.

Prenons $m \geq 1$ et $k > 0$

Supposons par l'absurde $H_k(S^n \setminus f([0,1]^m), \mathbb{Q}) \neq 0$

et représentons le par un cycle $\alpha \in Z_k(S^n \setminus f([0,1]^m), \mathbb{Q})$

On applique Mayer-Vietoris à $U = S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times [0,\frac{1}{2}])$

$V = S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times [\frac{1}{2},1])$

$$H_{k+1}(U\cup V, \mathbb{Q}) \to H_k(U\cap V, \mathbb{Q}) \to H_k(U,\mathbb{Q}) \oplus H_k(V,\mathbb{Q})$$

$\overset{\|}{0}$ par HR $\quad$ donc α est non nul dans U ou dans V

En itérant l'argument, on construit une suite décroissante d'intervalles $[0,1] = I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_j$ avec I_j de longueur 2^{-j} et l'image de α dans $H_k(S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times I_j, \mathbb{Q})$ non nulle.

Soit $p = \bigcap I_j$: l'image de α ds $H_k(S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times \{p\})$ est non nulle car sinon on pourrait écrire $\alpha = \partial \beta$ où $\beta \in C_{k+1}(S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times \{p\}))$ mais il existerait j tq $\beta \in C_{k+1}(S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times I_j)$ prouvant que α est nulle dans $H_k(S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times I_j, \mathbb{Q})$

Contradiction !

Réglons le cas $k=0$ supposons x, y sont dans deux comp. connexes par arcs distinctes de $S^n \setminus f([0,1]^{m})$ on construit de la même façon une suite I_j tq x et y sont toujours séparés ds $S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times I_j)$

on pose $p = \bigcap I_j$ et obtient que x et y sont séparés dans $S^n \setminus f([0,1]^{m-1} \times \{p\})$ ce qui contredit HR.

7. Théorie du degré

Soit $n \geq 1$. Toute application continue $f : S^n \to S^n$ induit

$$\begin{array}{ccc} H_n(f) : H_n(S^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(S^n, \mathbb{Z}) \\ \wr\wr & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times \deg f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Par fonctorialité, il vient $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$

on a aussi $\deg id = 1$ et $\deg c_{te} = 0$.

Il est utile de savoir calculer ce degré en pratique.

<u>Lemme</u>: Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $f_A : \hat{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$

$$\begin{cases} x \longmapsto Ax & x \in \mathbb{R}^n \\ \infty \longmapsto \infty \end{cases}$$

On a $\deg f_A = \operatorname{Sign} \det A$.

<u>preuve</u>: Comme $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ on a $\deg f_A = \pm 1$

Comme $Gl_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, celle de l'identité et celle de $s(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, x_n)$ et que ces comp. sont distinguées par le det, il suffit de montrer $\deg(s) = -1$ ce qu'on fait par récurrence sur n.

<u>$n=1$</u> : On utilise l'iso $\pi_1(S^1) \xrightarrow{\sim} H_1(S^1, \mathbb{Z})$

Vu en TD

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\sim} & H_1(S^1, \mathbb{Z}) \\ \downarrow s_* & & \downarrow s_* \\ \pi_1(S^1) & \longrightarrow & H_1(S^1, \mathbb{Z}) \end{array}$$

On utilise Mayer-Vietoris $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n > -1\}$
$V = \{ \text{———} \mid x_n < 1\}$

car on sait que $H_n(\underset{U \cup V}{S^n}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\underset{U \cap V}{S^{n-1}}, \mathbb{Z})$

Comme s agit par -1 sur S^{n-1}, la m^ chose est vraie pour S^n.

<u>Proposition</u> : Soit $f : \hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ et supposons que $f^{-1}(0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) = \phi$

et $f|_{B_j}(x) = A_j(x - x_j)$ où $A_j \in GL_n(\mathbb{R})$ $\forall i \neq j$

alors $\deg f = \sum_{j=1}^{k} \text{Signes}(\det A_j)$

<u>Preuve</u> : on note $K = \hat{\mathbb{R}}^n \setminus \bigcup B(x_j, \varepsilon)$

il existe une boule centrée en ∞ tq $f(K) \subset B$
B

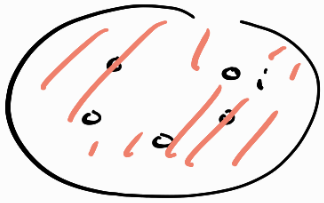
On considère
$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{R}}^n & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{R}}^n \\ p \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathbb{R}}^n/K & \xrightarrow{\tilde{f}} & \hat{\mathbb{R}}^n/B \end{array}$$

et on regarde l'effet en $H_n(\cdot, \mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \simeq H_n(\hat{\mathbb{R}}^n, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times \deg f} & \mathbb{Z} = H_n(\hat{\mathbb{R}}^n, \mathbb{Z}) \\ \downarrow p_* & & \downarrow \sim \\ \underset{\Pi V}{\mathbb{Z}^n} \simeq H_n(\bigvee_{i=1}^{k} S^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} = H_n(\underset{\underset{S^n}{\wr\wr}}{\hat{\mathbb{R}}^n/B}, \mathbb{Z}) \end{array}$$

si on montre que p_* est la diagonale. cela conclut avec le lemme précédent.

or on a des app $p_i : \bigvee S^n \longrightarrow S^n$
qui contractent toutes les sphères sauf la numéro i

et $p_i \circ p$:  Consiste à écraser tout sauf $B(x_i, \varepsilon)$. On sait que ça induit un iso en H_n
cqfd.

IV Homologie cellulaire

Commençons par étendre un peu la suite exacte de la paire en considérant des triplets $A \subset B \subset X$.
En effet, quelque soit le gp abélien Π on a des inclusions

$$C_*(A,\Pi) \subset C_*(B,\Pi) \subset C_*(X,\Pi) \quad \text{qui donne}$$

une inclusion $$C_*(B,\Pi)/_{C_*(A,\Pi)} \subset C_*(X,\Pi)/_{C_*(A,\Pi)}$$

dont le quotient est $C_*(X,\Pi)/C_*(B,\Pi)$ de sorte qu'on a une suite exacte de complexes:

$$0 \to C_*(B,A,\Pi) \to C_*(X,A,\Pi) \to C_*(X,B,\Pi) \to 0$$

qui induit une suite exacte longue comme pour les paires.

1) def:

Soit X un CW complexes avec $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$
sa décomposition en squelettes. On pose

$$C_n^{CW}(X,\Pi) = H_n(X_n, X_{n-1}, \Pi)$$

$$\partial_n = H_n(X_n, X_{n-1}, \Pi) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}, \Pi)$$

dans la suite du triplet $X_{n-2} \subset X_{n-1} \subset X_n$

Lemme : $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$

en effet en oubliant Λ

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}) & & & & \\ \quad \searrow^{\delta_n} & \downarrow & & & \\ & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \to & H_{n-2}(X_{n-2}) & \\ & & \searrow^{\delta_{n-1}} & \downarrow & \\ & & & H_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-3}) & \end{array}$$

suite de la paire (X_{n-1}, X_{n-2})

$(C_*^{cell}(X,\Lambda), \delta_n)$ est donc un complexe et son homologie est appelée homologie cellulaire de X.

Observation : il existe un voisinage ouvert U_n de X_{n-1} dans X_n qui se rétracte par def sur X_{n-1}

en comparant

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots H_k(X_{n-1}) & \to & H_k(X_n) & \to & H_k(X_n, X_{n-1}) & \to & \cdots \\ \wr\downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \\ H_k(U_n) & \to & H_k(X_n) & \to & H_k(X_n, U_n) & \to & \cdots \end{array}$$

et le lemme des cinq on tire $H_k(X_n, X_{n-1}) = H_k(X_n, U_n)$

puis par excision

$$H_k(X_n, U_n; \Lambda) = \bigoplus_{n \text{ cells}} H_k(D^n, \partial D^n, \Lambda)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \bigoplus_{n \text{ cells}} \Lambda & \text{si } k = n \end{cases}$$

on peut vérifier que $\delta_n : \bigoplus_{n \text{ cells}} \Lambda \longrightarrow \bigoplus_{n-1 \text{ cells}} \Lambda$

a pour matrice $\deg f_{ij}$ où

$$f_{ij} : \underset{\partial D_i^n}{\overset{\shortparallel}{S^{n-1}}} \longrightarrow \underset{\text{calculable!}}{X^{n-1}/X^{n-2}} \longrightarrow \underset{\partial D_j^{n-1}}{S^{n-2}}$$

Lemme : Soit X un CW-complexe

(1) si $n<k$ $\quad H_k(X_n,\Pi)=0$

(2) si $k<n$ $\quad H_k(X_n,\Pi) \xrightarrow[\sim]{} H_k(X,\Pi)$

preuve : la suite de la paire (X_n, X_{n-1}) montre

$$H_{k+1}(X_n,X_{n-1},\Pi) \to H_k(X_{n-1},\Pi) \to H_k(X_n,\Pi) \to H_k(X_n,X_{n-1},\Pi)$$

que $H_k(X_{n-1},\Pi) \xrightarrow{\sim} H_k(X_n)$ si $k \notin \{n, n-1\}$

ainsi pour $n<k$ $\quad 0 = H_k(X_0) \xrightarrow{\sim} H_k(X_1) \xrightarrow{\sim} \cdots = H_k(X_n)$

puis si $n>k$ on a

$$\begin{tikzcd}
H_k(X_n) \arrow[r, "\sim"] \arrow[drr, "\alpha"'] & H_k(X_{n+1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H_k(X_m) \arrow[dl] \quad \forall m \geq n \\
& & H_k(X) &
\end{tikzcd}$$

La surjectivité de α vient du fait que tout cycle de X provient de X_m pour m assez grand.

L'injectivité : $\alpha \in Z_k(X_n)$ tq $\alpha = \partial\beta$ $\quad \beta \in C_{k+1}(X)$

alors $\exists\, m \geq n$ tq $\beta \in C_{k+1}(X_m)$ et donc $[\alpha]=0$.

Thm : On a un iso $H_n^{CW}(X,\Pi) \simeq H_n(X,\Pi)$ $\forall n$.

On combine les suites exactes longues (X_{n+1},X_n) (X_n,X_{n-1}) et (X_{n-1},X_{n-2})

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & \\
& H_n(X_n) \arrow[r] \arrow[dr, "i_n"] & H_n(X_{n+1}) \arrow[r] & 0 \\
H_{n+1}(X_{n+1},X_n) \arrow[ur, "\delta_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"'] & & H_n(X_n,X_{n-1}) \arrow[r, "d_n"] & H_{n-1}(X_{n-1},X_{n-2})
\end{tikzcd}$$

$H_n(X_{n+1}) = H_n(X)$.

$$\xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X_{n-1})$$

On sait $H_n(X) = H_n(X_{n+1}) = H_n(X_n) / \operatorname{im} \delta_{n+1}$

$$= \operatorname{im}(i_n) / \operatorname{Im} d_{n+1} = \operatorname{Ker} \delta_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$$

$$= \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} = H_n^{CW}(X) \ !$$

L'homologie cellulaire est fonctorielle par rapport aux applications cellulaires ie $f : X \to Y$, $f(X_n) \subset Y_n \ \forall n$.

en effet f induit $f_* : H_n(X_n, X_{n-1}, \Lambda) \to H_n(Y_n, Y_{n-1}, \Lambda)$ qui est compatible avec les diff par fonctorialité de la suite exacte longue.

<u>Lemme</u> : on a un diag.

$$\begin{tikzcd} H_n(X,\Lambda) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f_*"] & H_n^{CW}(X,\Lambda) \arrow[d] \\ H_n(Y,\Lambda) \arrow[r, "\sim"] & H_n^{CW}(Y,\Lambda) \end{tikzcd}$$

qui provient de la fonctorialité

$$\begin{tikzcd} H_n(X,\Lambda) \arrow[r] & H_n(Y) \\ H_n(X_n,\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & H_n(Y_n) \\ H_n(X_n, X_{n-1},\Lambda) \arrow[r] & H_n(Y_n, Y_{n-1}) \end{tikzcd}$$

<u>Applications</u> :

<u>Prop 1</u> : soit X un CW complexe avec un nb fini de k-cellules. et K un corps

alors $\dim H_k(X, K) \leq k$.

preuve : on a $H_k(X,K) = H_k^{cell}(X,K)$

qui est un sous quotient de $\bigoplus_{k\text{-cells}} K$

et donc de dim inférieure

Prop 2 Soit X une variété top compacte alors $H_k(X,K)$ est de dim finie et nul pour k assez grand.

preuve, X est un rétracte d'un CW complexe fini et dans ce cas, c'est clair.

Prop 3 Si X est un CW fini. $\chi(X) = \sum (-1)^k \#\, k$ cells

si $X \xrightarrow{\sim} Y$ sont homot. équiv. $\chi(X) = \chi(Y)$

preuve : on a
$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \dim C_k^{cell}(X,K)$$
$$= \sum (-1)^k \dim H_k^{cell}(X,K)$$
$$= \sum (-1)^k \dim H_k(X,K)$$
qui est invariant par homotopie.

Exemple : $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{en degré } 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$