Chapitre 4 : groupes d'homotopie supérieurs

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/15$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/15$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/24\times\mathbb{Z}/3$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$

C'est un sacré bazar ! Dans ce chapitre on va tenter d'y voir un peu plus clair (mais pas trop).

I Groupes d'homotopie relatifs

On se donne une paire (X, A) avec un point base $x_0 \in A$

On choisit aussi un point base $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ puis pour tout $n \geqslant 1$ on définit $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)]$

c'est-à-dire l'ensemble des $f : D^n \to X$ tq $f(S^{n-1}) \subset A$ et $f(s_0) = x_0$ modulo homotopie relative aux contraintes.

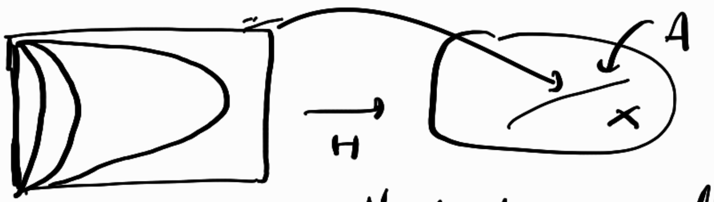
<u>Exemple</u> : si $A = \{x_0\}$ on retrouve la définition de $\pi_n(X, x_0)$.

Pour se faire une idée montrons tout de suite le

Lemme de compression : Une application $f:(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ vérifie $[f] = [c_{x_0}]$ ds $\pi_n(X, A, x_0)$ ssi f est homotope relativement à S^{n-1} à une app. à valeurs dans A.

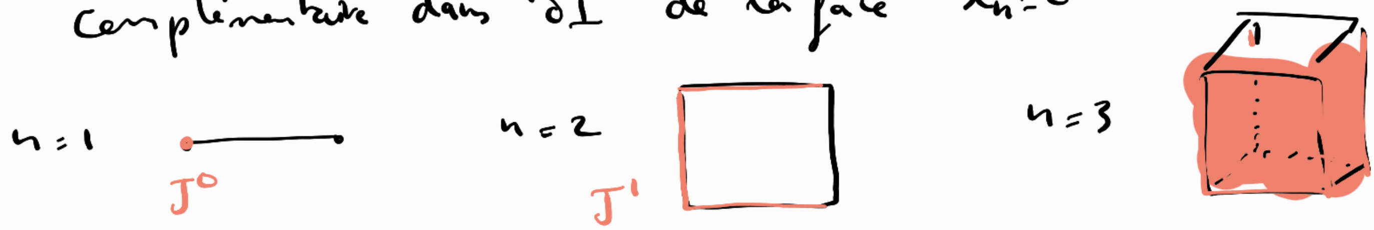
Preuve : $\Leftarrow$ Notons $g : D^n \to A$ l'application à laquelle f est homotope. On a $[f] = [g]$. Comme D^n se rétracte par déformation sur s_0, en composant g par cette rétraction on montre $[g] = [c_{x_0}]$.

$\Rightarrow$ donnons nous $H : D^n \times [0,1] \to X$ l'homotopie entre f et c_{x_0}



en restreignant H en une famille de disques allant de $D^n \times \{0\}$ à $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$ on obtient une homotopie entre f et une application à valeurs dans A.

Variante : on peut remplacer $(D^n, S^{n-1}; s_0)$ par $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ où $I = [0,1]$ et J^{n-1} est le complémentaire dans ∂I^n de la face $x_n = 0$



Lemme : Soit $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$
$n \geq 2$ $\quad g$ idem

On pose $f * g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2 \dots x_n) & \text{si } x_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(2x_1 - 1, x_2, \dots x_n) & \text{si } x_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Alors cette loi passe au quotient et définit sur

$\pi_n(X, A, x_0)$ une loi de groupe, abélien si $n \geq 3$ ou $n = 2$ et $A = \{x_0\}$.

Par l'inclusion $\{x_0\} \subset A$ on a un morphisme $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ et par celle de A dans X un morphisme $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$. Enfin, étant donné $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$

on peut considérer $\partial f = f|_{S^{n-1}} \in \pi_{n-1}(A, x_0)$

il est clair que ça passe au quotient $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$

La proposition suivante est très utile (et la preuve assez formelle)

<u>Prop</u> : Pour tout triplet (X, A, x_0) on a une suite exacte longue

$$\to \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to$$

<u>Preuve</u> On précise que $\pi_0(X, A)$ n'est pas défini et que $\pi_1(X, A, x_0)$, $\pi_0(A, x_0)$ $\pi_0(X, x_0)$ ne sont pas des groupes. Ce sont néanmoins des ensembles pointés. L'énoncé signifie que l'image d'une flèche = la préimage de l'élément trivial par la flèche suivante.

<u>Exactitude en $\pi_{n-1}(A \quad)$</u>

$g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (\quad A, x_0)$

$\partial g = g|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow A \longrightarrow X$

∂g est homotope à l'application constante dans X

il suffit de poser $H(x,t) = g((1-t)x + t s_0)$

ainsi la composée $\pi_n(X,A,x_0) \to \pi_{n-1}(A,x_0) \to \pi_{n-1}(X,x_0)$ est triviale.

Partons de $f:(S^{n-1}, s_0) \to (A,x_0)$ qui est homotope à c_{x_0} dans X. Soit $H: S^{n-1}\times[0,1] \longrightarrow X$ l'homotopie

Comme $H(S^{n-1}\times\{1\}) = x_0$, on peut définir

$$\tilde{H}: \underbrace{S^{n-1}\times[0,1) / _{S^{n-1}\times\{1\}}}_{D^n} \longrightarrow X$$

Cette application envoie ∂D^n sur A : c'est l'élément de $\pi_n(X,A,x_0)$ qu'on cherche.

Exactitude en $\pi_n(X,A,x_0)$

Soit $f:(D^n,\partial D^n) \to (X,x_0)$ on a $\partial f = c_{x_0}$ qui est donc trivial.

Réciproquement si $f:(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X,A,x_0)$ vérifie $\partial f \simeq c_{x_0}$ on prolonge f par une couronne pour avoir $\tilde{f}: (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$

Par construction on a $[f] = [\tilde{f}]$ dans $\pi_n(X,A,x_0)$.

Exactitude en $\pi_n(X,x_0)$

Si $f:(D^n,S^{n-1}) \to (X,x_0)$ représente c_{x_0} dans $\pi_n(X,A,x_0)$ alors par le lemme de compression f est homotope à une fonction à valeurs dans A.

Réciproquement, si $f:(D^n,S^{n-1}) \to (A,x_0)$ alors $\partial f = c_{x_0}$

II Fibrations et suite d'homotopie

Def : une fibration $p: X \to B$ de fibre F est une app. continue tq $\forall\, b \in B\ \exists U \ni b$ voisinage et un homéo $\phi: p^{-1}(U) \simeq U \times F$ tq

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d, "p_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$ commute

par exemple si F est discret, il s'agit d'un revêtement.

Exemple : Si G est un groupe topologique loc. compact agissant sur X séparé loc. compact de façon propre et libre alors

$p: X \to X/G$ est une fibration de fibre G.

ou plus généralement (Transformation groups - Tom Dieck) si l'action n'est plus libre mais les stabilisateurs sont tous conjugués à un sous-groupe fermé $H < G$ alors

$p: X \to X/G$ est une fibration de fibre G/H.

Sous-exemple la fibration de Hopf

$S^1 \circlearrowright S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$

$e^{i\theta} \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$ l'action est libre

$S^3/S^1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$

Très concrètement $p: \begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & [z_1, z_2] \end{array}$

$U = \{ [z, 1] \}$ $\quad p^{-1}(U) \simeq U \times S^1$

$(z_1, z_2) \mapsto [z_1, z_2], \frac{z_2}{|z_2|}$

$V = \{ [1, z] \}$ $\quad p^{-1}(V) \simeq V \times S^1$

$(z_1, z_2) \to [z_1, z_2], \frac{z_1}{|z_1|}$

Th (relèvement dans les fibrations)

Soit $p : X \to B$ une fibration

Soit $H : [0,1]^k \to B$ et $\tilde{f} : [0,1]^{k-1} \to X$

tq $p \circ \tilde{f}(t) = H(0,t)$

alors $\exists\ \tilde{H} : [0,1]^k \to X$ tq $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(0,t) = \tilde{f}(t)$

preuve : par compacité on peut subdiviser $[0,1]^{k-1}$ en petits cubes C et $[0,1]$ en intervalles I_j tq

$H(C \times I_j) \subset U_\alpha$ ouvert de trivialisation. On va supposer par récurrence que $\tilde{H}$ a déjà été construit sur $C \times \{0\} \cup \partial C \times [0,1]$ pour tout C. On se ramène ainsi au cas où H envoie tout $C \times I_j \simeq [0,1]^k$ dans U_α

ie au cas où $X \simeq B \times F$

on a alors $\tilde{H}(x) = (H(x), f(x))$

où f est défini sur $[0,1]^{k-1} \times \{0\} \cup \partial [0,1]^{k-1} \times [0,1]$

et doit être prolongée : on prolonge par $\tilde{f} = f \circ r$

où r est une rétraction de $[0,1]^k$ sur ______ .

Suite exacte longue des fibrations

thm : soit $p : X \to B$ une fibration $x \in X$, $b = p(x)$ et $F = p^{-1}(b)$ la fibre en b. On note $i : F \to X$

alors on a une suite exacte longue

$$\pi_{k+1}(B,b) \to \pi_k(F,x) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X,x) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B,b) \to \pi_{k-1}(F,x)$$

<u>Preuve</u> : on part de la suite exacte longue de la paire (X,F)

$$\pi_{k+1}(B,b) \to \pi_k(F,x) \to \pi_k(X,x) \to \pi_k(X,F,x) \to \pi_{k-1}(F,x) \to \cdots$$

de sorte que le théorème se réduit à prouver que

$p_* : \pi_k(X,F,x) \longrightarrow \pi_k(B,b)$ est un iso $\forall k$.

<u>surjectivité</u> : $f : [0,1]^k \longrightarrow B$, $\partial[0,1]^k \longrightarrow b$ $\qquad J^{k-1} \subset \partial[0,1]^k$, $\tilde{f}(J^{k-1}) = x$

Comme $([0,1]^k, J^{k-1}) \underset{\text{homéo}}{\simeq} ([0,1]^k, [0,1]^{k-1} \times \{0\})$

on peut appliquer le th. de relèvement qui prouve que f peut être relevé en $\tilde{f} : [0,1]^k \to X$ de sorte que $\tilde{f}(J^{k-1}) = \{x\}$

cela produit l'élément de $\pi_k(X,F,x)$ désiré.

<u>injectivité</u> raisonnement similaire.

<u>Exemple</u> : grâce à la fibration de Hopf $\quad S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$

et $\pi_k(S^1) = 0 \ \forall k \geq 2$ on a $\pi_k(S^3) \simeq \pi_k(S^2)$ $\forall k \geq 3$

<u>Remarque</u> : on peut remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{H}$ ce qui définit

$S^3 \hookrightarrow S^7 \to S^4$ une fibration

de même avec les octonions, on a $\quad S^7 \hookrightarrow S^{15} \to S^8$

On va montrer dans la section suivante que $\pi_3(S^7) = 0$ et $\pi_7(S^{15}) = 0$ donc $i : F \to X$ est homotope à 0

$\forall$ $\pi_n(B) \simeq \pi_n(X) \times \pi_{n-1}(F)$, ✓

ie $\pi_n(S^4) = \pi_n(S^7) \oplus \pi_n(S^3)$

$\pi_n(S^8) = \pi_n(S^{15}) \oplus \pi_n(S^7)$!

III Théorème d'Hurewicz

Soit (X, A, x_0) un triplet d'espaces. On rappelle que $\pi_n(X, A, x_0) = \{ f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0) \}/\sim$

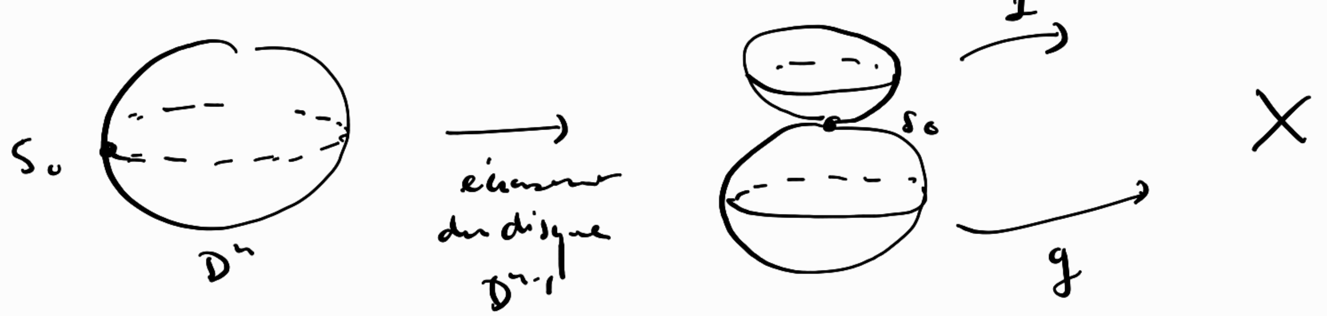
le morphisme induit $f_* : H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_n(X, A, x_0)$

Si on note α_n le générateur de $H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$

on définit
$$h : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A, x_0)$$
$$[f] \longmapsto f_* \alpha_n$$

Proposition : Pour $n \geq 2$ h est un morphisme de groupes.

preuve : rappelons comment est défini le produit 17



ainsi $h(f * g) = f \vee g \circ c$ où $c : D^n \longrightarrow D^n/D^{n-1}$ $= D^n \vee D^n$

On a $h(f \circ g) = f \circ g\,(\alpha_n) = (f \vee g)_*(c(\alpha_n))$ par fonctorialité

il suffit de montrer
$$H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{c_*} H_n(D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$$
$$\cong$$
$$H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(D^n, S^{n-1}) \oplus H_n(D^n, S^{n-1})$$

est $id \oplus id$. Pour cela on introduit

$q_1, q_2 : D^n \vee D^n \to D^n$ qui écrasent le deuxième et le premier disque respectivement. On a $q_1 \circ c \simeq id$ $q_2 \circ c \simeq id$ d'où le resultat.

<u>Action de $\pi_1(A)$</u> : on observe que $\pi_1(A, x_0)$ agit sur $\pi_n(X, A, x_0)$ de la façon suivante : soit

$f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ et $\gamma : ([0,1], \{0,1\}) \to (A, x_0)$

on pose γf :
$$\begin{aligned} D^n \vee S^{n-1} \times [0,1) &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto f(x) \\ (y, t) &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

on observe que f et γf sont homotopes en tant qu'applications de la paire $(D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$
ainsi $h(f) = h(\gamma f)$.

On note $\pi_n'(X, A) = \pi_n(X, A) / \langle \gamma \cdot f\, f^{-1} \rangle$
<u>$n \geq 2$</u>

<u>Rque</u> : dans le cas non relatif, on a $\pi_1(X, x_0)$ agit sur $\pi_n(X, x_0)$ par la même formule et on pose aussi $\pi_n'(X) = \pi_n(X) / \langle \gamma f \cdot f^{-1} \rangle$
le théorème d'Hurewicz vu en TD s'écrit $\pi_1'(X) \simeq H_1(X)$ si X est connexe par arcs.

<u>Théorème</u> : Soit (X, A) une paire d'espaces connexes par arcs
<u>Hurewicz</u> Soit $n \geq 2$ et supposons (X, A) $(n-1)$-connexe ie
$\pi_k(X, A, x_0) = 0$ $\forall k < n$ alors $H_k(X, A) = 0$ $\forall k < n$
et $h : \pi_n'(X, A) \to H_n(X, A)$ est un isomorphisme

<u>Application</u> : soit $n \geq 2$. Montrons que $\pi_k(S^n) = 0$ si $0 < k < n$ et $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

On sait déjà $H_k(S^n)=0$ si $0<k<n$

et $H_n(S^n)=0$. D'autre part $\pi_1(S^n)=0$

soit k_0 le plus petit entier avec $\pi_k(S^n)\neq 0$ $(k\geq 2)$

d'après le th. $X=S^n$ $A=\{x_0\}$ $\Rightarrow$ $H_k(S^n)=0$ si $k<k_0$

$$H_{k_0}(S^n)=\pi'_{k_0}(S^n,x_0) = \pi_{k_0}(S^n,x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ $k_0=n$ et $\pi_n(S^n)=H_n(S^n)=\mathbb{Z}$.

<u>Rappel</u>: invariance par homotopie

$$P_{n,i}:\Delta^{n+1}\longrightarrow[0,1]\times\Delta^n$$

$$(t_0,\dots,t_n)\longmapsto t_0e_0+\dots+t_ie_i+t_{i+1}f_i+\dots+t_nf_{n}$$

$$\sum_{i=0}^n(-1)^iP_{n,i} = i_1\times i_n\in C_{n+1}(\Delta_1\times\Delta_n)$$ décomposition du prisme

vérifie $\partial(i_1\times i_n)=\partial i_1\times i_n - i_1\times\partial i_n$

Si on a $H:[0,1]\times X\longrightarrow Y$ avec $f(x)=H(0,x)$
$g(x)=H(1,x)$

alors on pose $K: C_n(X)\to C_{n+1}(Y)$

$$\sigma\longmapsto H_*(i_1\times\sigma)_*(i_1\times i_n)$$
$$= \mathcal{H}_*(i_1\times i_n)$$

où $\mathcal{H}:[0,1]\times\Delta_n\to Y$

$$(t,x)\mapsto H(t,\sigma(x))$$

on a $\partial K(\sigma)+K(\partial\sigma)=\partial\mathcal{H}_*(i_1\times i_n)+\mathcal{H}_*(i_1\times\partial i_n)$

$$= \mathcal{H}_*(\partial i_1\times i_n + i_1\times\partial i_n) = \mathcal{H}_*(\partial i_1\times i_n)$$

$$= g_*\sigma - f_*\sigma$$

Pour prouver Hurewicz on s'appuie sur cette technique.

On remplace aussi (D^n,S^{n-1}) par $(\Delta^n,\partial\Delta^n)$ de sorte à avoir $\alpha_n\in H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)$ représenté par i_n.

Ainsi $f:(\Delta^n,\partial\Delta^n,s_0)\longrightarrow(X,A,x_0)$

est envoyé simplement sur $[f]\in H_n(X,A)$

Notons $C_k^{(n)}(X,A)$ le sous-groupe de $C_k(X,A)$ engendré par les $\sigma : \Delta^k \to X$ envoyant le n-squelette de Δ^k dans A. (mod $C_n(A)$). Il s'agit d'un sous complexe et on a $C_k^{(n)}(X,A) = 0$ si $n \geq k$

<u>Proposition</u> : Si (X,A) est n-connexe le morphisme naturel $H_*^{(n)}(X,A) \to H_*(X,A)$ est un isomorphisme.

<u>Preuve</u> : On définit pour tout simplexe $\sigma : \Delta^k \to X$ une application $P(\sigma) : [0,1) \times \Delta^k \to X$ vérifiant

(i) $P(\sigma)(0,\cdot) = \sigma$

(ii) $P(\sigma)(1,\cdot) \in C_k^{(n)}(X,A)$

(iii) $\sigma \in C_k^{(n)}(X,A) \Rightarrow P(\sigma)(t,\cdot) = \sigma \quad \forall\, t \in [0,1]$

(iv) $P(\sigma) \circ (i_1 \times \partial_k^j) = P(\sigma \circ \partial_k^j)$

L'application P est définie par récurrence sur k. On suppose qu'elle est définie sur tous les simplexes de dim $< k$. On se donne $\sigma : \Delta^k \to X$. D'après (iv) et l'hypothèse de récurrence, $P(\sigma)$ est définie sur $i_1 \times \partial_k^j$. D'après (i) sur $\{0\} \times \Delta^k$.

Si $k \leq n$ on a par hypothèse $\pi_k(X,A) = 0$

 $\to A$ par le critère de compression l'app $P(\sigma)$ restreinte à $\Delta^q \times \{0\} \cup \partial\Delta^q \times [0,1)$ est homotope relativement au bord à une app à valeurs dans A. On peut donc prolonger $P(\sigma)$ à tout le prisme.

$\sigma \times 0$)

Si $k > n$ on prolonge n'importe comment (par exempl via une rétraction de $[0,1]\times\Delta^n$ sur $\{0\}\times\Delta^n \cup [0,1]\times\partial\Delta^n$

On définit alors $\phi : C_k(X,A) \longrightarrow C_k^{(n)}(X,A)$

par $\phi(\sigma) = P(\sigma)(1,\cdot)$

et $K : C_k(X,A) \to C_{k+1}(X,A)$ par $K(\sigma) = P(\sigma)\circ(i_1\times i_k)$

on a alors $\partial K\sigma + K\partial\sigma = P(\sigma)\,\partial(i_1\times i_k) + P(\sigma)\circ i_1\times\partial i_k$

$= P(\sigma)(1,\cdot) - P(\sigma)(0,\cdot)$

$= \phi(\sigma) - \sigma$

Ainsi ϕ est un inverse homotopique de l'inclusion

$C_k^{(n)}(X,A) \to C_k(X,A)$ et la proposition est prouvée.

<u>Preuve d'Hurewicz</u> : comme $C_k^{(n-1)}(X,A) = 0$ pour $k\leq n-1$

bien $H_k(X,A) = 0 \quad \forall\, k\leq n-1$

Soit $f : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (X,A)$ d'où $f\in C_n^{(n-1)}(X,A)$

on note $f : \pi_n'(X,A) \longrightarrow H_n^{(n-1)}(X,A) \simeq H_n(X,A)$

l'app. induite. On veut construire l'inverse. pour cela

on prend $\sigma : \Delta^n \to X$ quitte à ramener le point base
$\partial\Delta^n \to A$ à x on construit

$\phi(\sigma)\in\pi_n'(X,A)$. C'est bien défini et c'est un inverse de h

$\phi : C_n^{(n-1)}(X,A) \longrightarrow \pi_n'(X,A)$

Tous les éléments de $C_n^{(n-1)}(X,A)$ sont des cycles. il suffit pour conclure de mq ϕ est nul sur un bord.

Soit $\sigma\in C_{n+1}^{(n-1)}(X,A)$ ie $\sigma : \Delta^{n+1} \to X$
$(n-1)$ sk. $\to A$

on a $\phi(\partial\sigma) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j\, \sigma\circ\partial_{n+1}^j$

Or $g : \partial\Delta^{n+1} \to X$ représente 0 ds $\pi_n(X)$ puisqu'elle s'étend au simplexe Δ^{n+1} $\quad \pi_n(X) \to \pi_n(X,A)$
$\qquad g \to g$

La même chose est vraie dans $\pi_n(X,A)$ et le resultat est demontré.

Applications

<u>Thm</u>: $\forall G$ groupe $\exists X$ CW complexe connexe par arcs tq $\pi_1 X = G$ $\pi_n X = 0$ $n > 1$
X est unique à homotopie près.

<u>preuve</u> A l'aide d'une présentation de $G = \langle a_i \mid r_j \rangle$ on fabrique un 2-complexe X_2 connexe par arcs tq $\pi_1 X_2 = G$ [les 1-cellules correspondent aux gen. les 2-cellules aux relations].

Si $\pi_2 X_2 \neq 0$ on choisit $[f_k : S^2 \to X_2]_{k \in K}$ des représentants de générateurs puis on pose $X_3 = \bigsqcup_k D^3 \cup X_2 / \sim$
C'est un CW-complexe dont le 2-squelette est X_2

$$\pi_3(X_3, X_2) \to \pi_2(X_2) \to \pi_2(X_3) \to \pi_2(X_3, X_2) \to \pi_1(X_2) \to \pi_1 X_3 \to \pi_1(X_3, X_2)$$

$H_k(X_3, X_2) = 0$ si $k \neq 3$ et $H_3(X_3, X_2) = \mathbb{Z}^{(K)}$

Par Hurewicz $\Rightarrow$ même chose pour π_k

$$\mathbb{Z}^{(K)} \to \pi_2(X_2) \to \pi_2 X_3 \to 0 \to G \to \pi_1 X_3 \to 0$$

$\Rightarrow \pi_2 X_3 = 0$ et $\pi_1 X_3 = G$. Il n'y a plus qu'à itérer.

<u>Unicité</u>: Soit X, Y deux tels espaces

on se donne $\phi : \pi_1 X \xrightarrow{\sim} \pi_1 Y$ un isomorphisme.

on envoie X_0 sur le point base de Y puis on choisit un arbre maxi $T \subset X_1$ qu'on envoie sur le pt base de Y. Chaque arête restante correspond à $\gamma \in \pi_1(X)$ - on l'envoie dans Y' pour représenter $\phi(\gamma)$.

Toute 2-cellule de X est $D^2 \to X$

$\partial D^2 \to \underset{\circ}{\gamma} \in \pi_1 X \to \underset{\circ}{\pi_1 Y}$

on étend $f : \partial D^2 \to Y$ à D^2 -

$\forall$ k cells $k \geq 3$ $\quad \underset{S^{k-1}}{\partial D^k} \to Y$ défini(e) $\quad \pi_{k-1}(Y) = 0$

on peut donc prolonger.

$\exists f : X \to Y \quad g : Y \to X$ un raisonnement similaire montre $f \circ g \sim id_Y$

$g \circ f \sim id_X$.

<u>thm</u>: Soit $f : X \to Y$ une app. continue entre espaces connexes par arcs. Si $f_* : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, f(x_0))$ est un iso $\forall k > 0$ alors $f_* : H_k(X, x_0) \to H(Y, f(x))$

La réciproque est vraie si X est simplement connexe aussi

<u>Thm de Whitehead</u> : si X, Y sont des CW-complexes alors f est une équivalence d'homotopie.

<u>Preuve</u>: $Cf = X \times [0,1] \sqcup Y \,/_{(x,1) \sim f(x)}$

Cf se rétracte par def sur Y et on a $X \subset Cf$

suite exacte de la paire $(X, Cf) \to \pi_k(Cf, X) = 0 \; \forall k > 0$

Hurewicz $\Rightarrow$ $H_k(C_f, X) = 0$ $\forall k$

suite de la paire homologique donne

$$\begin{tikzcd} H_k(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "f_*"'] & H_k(C_f) \arrow[d, equal] \\ & H_k(Y) \end{tikzcd}$$