

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE - EXAMEN
01/06/2026

Durée 3h, portables et notes de cours non autorisés.

Exercice 1: Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-anneau. On pose

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G(A) = \{M(x, y, z), x, y, z \in A\}$$

1. On considère l'action de $G(\mathbb{Z})$ par translation à gauche sur $G(\mathbb{R})$ et on pose $H = G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R})$. Montrer que l'application quotient $p : G(\mathbb{R}) \rightarrow H$ est un revêtement.

2. Montrer que H est une variété topologique et calculer ses groupes fondamentaux $\pi_n(H, p(1))$ pour tout $n \geq 1$.

3. Soit $C \subset G(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices $M(x, y, z)$ vérifiant $x, y, z \in [0, 1]$. Montrer que $p|_C : C \rightarrow H$ est surjective.

4. Décrire H à partir d'identifications des faces de C . Est-ce une décomposition cellulaire?

5. Soit $\tilde{f} : G(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\tilde{f}(M(x, y, z)) = (x, y)$. Montrer que \tilde{f} induit une fibration $f : H \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Indication: on pourra penser à f comme un quotient par un groupe compact.

6. Montrer que le groupe fondamental de la fibre s'injecte dans le centre de $\pi_1(H)$.

Exercice 2:

Soit X et Y deux espaces topologiques non vides. On définit intuitivement le joint $X * Y$ comme l'ensemble des combinaisons barycentriques $(1 - t)x + ty$ avec $x \in X, y \in Y, t \in [0, 1]$. Formellement, il s'agit du quotient de $X \times Y \times [0, 1]$ par la relation

$$(x, y, t) \sim (x', y', t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ et } t = t' = 0 \text{ ou} \\ y = y' \text{ et } t = t' = 1 \text{ ou} \\ x = x', y = y' \text{ et } t = t'. \end{cases}$$

1. Montrer que $X * Y$ est connexe par arcs.

2. Construire un homéomorphisme $S^1 * S^1 \simeq S^3$.

Indication: on pourra considérer la paramétrisation de $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ donnée par $(\cos(\theta)u, \sin(\theta)v)$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$ et $u, v \in S^1$.

3. On pose $U = \{(x, y, t) \in X * Y, t < 1\}$ et $V = \{(x, y, t) \in X * Y, t > 0\}$. Montrer que U, V et $U \cap V$ se rétractent par déformation sur X, Y et $X \times Y$ respectivement.

4. On suppose dorénavant que X et Y sont connexes par arcs. Montrer que $X * Y$ est simplement connexe.

5. Soit $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ les deux projections et on note

$$\phi_n = (p_1)_* + (p_2)_* : H_n(X \times Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}) \oplus H_n(Y, \mathbb{Z}).$$

Montrer que ϕ_n est surjective pour tout $n > 0$ et que ϕ_1 est injective.

Indication: pour ϕ_1 , on pourra utiliser le théorème d'Hurewicz.

6. En déduire que $H_2(X * Y, \mathbb{Z}) = 0$ et $H_3(X * Y, \mathbb{Z}) = \ker \phi_2$.

7. Construire un morphisme naturel $\pi_1(X) \times \pi_1(Y) \rightarrow \pi_3(X * Y)$. Que suggèrent les résultats précédent sur la structure de $\pi_3(X * Y)$?

Exercice 3:

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Borsuk–Ulam :

Théorème. Soit $n \geq 1$. Pour tout $f : S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ continue, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

1. Dédurre ce théorème de l'énoncé suivant: il n'existe pas d'application continue $h : S^n \rightarrow S^{n-1}$ telle que $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in S^n$.

2. Le prouver pour $n = 1$. Dans la suite on supposera $n \geq 2$.

3. Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement à deux feuillets et τ l'unique automorphisme de revêtement non trivial. Pour un simplexe singulier $\sigma : \Delta_k \rightarrow B$, on définit

$$T(\sigma) = \tilde{\sigma} + \tau\tilde{\sigma},$$

où $\tilde{\sigma} : \Delta_k \rightarrow X$ est un relèvement de σ .

Montrer que T induit une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow C_*(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T} C_*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} C_*(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

4. Considérant la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la question précédente associée au revêtement $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, montrer que les morphismes de connexion naturels

$$\phi_k : H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

sont des isomorphismes pour $k = 1, \dots, n$.

5. Soit $g : S^n \rightarrow S^n$ une application impaire, i.e telle que $g(-x) = -g(x)$ pour tout $x \in S^n$ et $\tilde{g} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ l'application induite. Montrer par récurrence sur k que $\tilde{g}_* : H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $k = 0, \dots, n$.

6. En déduire que $\deg(g)$ est impair. On pourra montrer que g_* induit un isomorphisme sur $H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et utiliser le diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

7. Prouver l'énoncé de la question 1.

Indication: raisonner sur le degré de la restriction de h à un équateur $S^{n-1} \subset S^n$.