# TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE - PARTIEL

*Durée 2h, portables et notes de cours non autorisés.*

**Exercice 1:** Soit $p : X \to B$ un revêtement, $x \in X$ et $b = p(x)$.

**1.** Montrer que pour tout $n \geq 2$, $p_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(B, b)$ est un isomorphisme.

Corrigé: on sait déjà d'après le cours que $p_*$ est un morphisme de groupe. Montrons d'abord qu'il est surjectif. On fixe un point base $x_0 \in S^n$ et on se donne $\alpha : (S^n, x_0) \to (B, b)$ représentant la classe d'un élément de $\pi_n(B, b)$. Comme $\pi_1(S^n, x_0)$=0 puisque $n \geq 2$, le théorème du relèvement affirme qu'il existe un unique relèvement $\tilde{\alpha} : (S^n, x_0) \to (X, x)$. On a par construction $[\alpha] = p_*[\tilde{\alpha}]$ donc $p_*$ est surjectif.
Pour l'injectivité, prenons $\tilde{\alpha} : (S^n, x) \to (X, x)$ tel que $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ représente 0 dans $\pi_n(B, b)$. Cela signifie qu'il existe une homotopie $H : S^n \times [0, 1] \to B$ vérifiant $H(x, 0) = \alpha(x), H(x_0, t) = b, H(x, 1) = b$ pour tout $x \in S^n$ et pour tout $t \in [0, 1]$. Par le théorème de relèvement des homotopies, il existe un unique relèvement $\tilde{H} : S^n \times [0, 1] \to B$ de $H$ qui coincide avec $\tilde{\alpha}$ sur $S^n \times \{0\}$. Le sous-ensemble $A = \{x_0\} \times [0, 1] \cup S^n \times \{1\}$ est connexe et vérifie $p \circ \tilde{H}(A) = H(A) = b$. Comme $\tilde{H}(A)$ contient $x$, on en déduit $\tilde{H}(A) = x$ ce qui signifie précisément que $\tilde{H}$ est une homotopie entre $\tilde{\alpha}$ et le lacet constant égal à $x$.

Soit $S^2$ la sphère de dimension 2 munie d'un point base $x$. Dans toute la suite, on admettra que $\pi_1(S^2, x) = 0$ et $\pi_2(S^2, x) \neq 0$.

**2.** Soit $B = S^1 \vee S^2$. On pose

$$X = S^2 \times \mathbb{Z} \cup \{x\} \times \mathbb{R} \subset S^2 \times \mathbb{R}.$$

Construire un revêtement $p : X \to B$ et calculer son groupe d'automorphismes.

Corrigé: On constate que $\mathbb{Z}$ agit sur $X$ par la formule $n.(y, t) = (y, t + n)$ et que cette action est propre et libre. L'application $p : X \to S^2 \vee S^1$ définie par $p(y, t) = e^{2i\pi t}$ induit une bijection sur le quotient. Comme ce quotient est manifestement compact, l'application $p$ s'identifie au passage au quotient, ce qui montre que $p$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}$.

**3.** Démontrer que $X$ est un revêtement universel de $B$.[1]

Corrigé: cela revient à montrer que $X$ est connexe par arcs et simplement connexe. $X$ est obtenu en collant une sphère sur chaque entier de la droite réelle, il est donc manifestement connexe par arcs. Pour montrer que $X$ est simplement connexe, l'argument heuristique est que tout lacet visite éventuellement un nombre fini de sphères $S^2$: chacune étant simplement connexe, chaque excursion peut être par une homotopie rétractée sur le point de contact. On se ramène donc à un lacet sur $\mathbb{R}$ qui est simplement connexe et le résultat est démontré.
Si on veut formaliser cet argument, on est gêné par le fait qu'il peut y avoir une infinité d'excursions. Soit $\pi : X \to \mathbb{R}$ la deuxième projection et $\gamma : [0, 1] \to X$ un lacet basé en $(x, 0)$. Le lacet $\pi \circ \gamma$ de $\mathbb{R}$ a pour image un compact $[A, B]$ de $\mathbb{R}$. On va montrer par récurrence sur $k$ que si $|A - B| < k$ alors $\gamma$ est contractile. Pour $k = 1$, on voit que $\gamma$ prend alors ces valeurs dans $S^2 \times \{0\} \cup \{x\} \times ]-1, 1[$ qui se rétracte par déformation sur $S^2$ qui est simplement connexe. Supposons maintenant que $B = k + \epsilon$ avec $0 < \epsilon < 1$. On considère le recouvrement ouvert $U = \pi^{-1}([A, k - 1/3[)$ et $V = \pi^{-1}]k - 2/3, B]$ de $X$. Par compacité, lacet $\gamma$ peut être décomposé en une succession finie de lacets qui prennent successivement leurs valeurs dans $U$ et $V$. Or $V$ est aussi une sphère collée sur un segment et à ce titre est simplement connexe. Ainsi les morceaux de $\gamma$ dans $V$ peuvent être rétractés et $\gamma$ est homotope à un lacet dans $U$: on applique alors l'hypothèse de récurrence.

**4.** Justifier que $\pi_2(B, b)$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments (on admettra juste que $\pi_2(S^2, x) \neq 0$).[2]

Corrigé: Supposons par l'absurde que $\pi_2$ est engendré par $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : (S^2, x) \to (X, \{x, 0\})$. L'image de chaque $\pi \circ \gamma_i$ est alors compacte, prenons $N$ tel que ces applications prennent toutes

[1] Sans utiliser Van-Kampen, qui n'est pas encore vu en cours.

[2] Cette question est plus difficile, ne pas hésiter à la passer.

leurs valeurs dans $[-N, N]$. Posons $\Sigma = S^2 \times \{N+1\}$: on a une inclusion $i : \Sigma \to X$ mais aussi une rétraction $r : X \to \Sigma$ qui envoie le complémentaire de $\Sigma$ en $(x, N+1)$. Cela donne une rétraction $r : \pi_2(X) \to \pi_2(\Sigma)$. Par construction, on a $r_*([\gamma_i]) = 0$ pour tout $i$: comme ce sont des générateurs, cela donne l'annulation de $r_* : \pi_2(X) \to \pi_2(\Sigma)$. Cela contredit le fait que $\pi_2(\Sigma) \neq 0$.

⋆⋆⋆

**Exercice 2:** Soit

$$S^\infty = \{(x_0, x_1, \dots, ) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{tel que } x_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand et } \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 = 1\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une inclusion évidente $i_n : S^n \to S^\infty$ et on munit $S^\infty$ de la topologie "limite inductive" relative à cette famille d'applications.

**1.** Montrer que l'application décalage $D : S^\infty \to S^\infty$ définie par $D(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$ est continue et homotope à l'identité.

Corrigé: par définition de la topologie sur $S^\infty$, $D$ est continue ssi $D \circ i_n$ l'est pour tout $n$. Mais cette application, vue à valeurs dans $S^{n+1}$ est continue, et en la composant par $i_{n+1}$, elle l'est encore, cqfd.
Posons $H(x,t) = \frac{(1-t)x+tD(x)}{||(1-t)x+tD(x)||}$: pour une raison analogue, elle est continue si elle est bien définie, à savoir si on n'a jamais $(1-t)x + tD(x) = 0$. Mais en posant $x = (x_0, x_1, \dots)$, cette équation implique $(1-t)x_0 = 0$ puis $(1-t)x_n + tx_{n-1} = 0$. Ceci implique de proche en proche que $x = 0$, ce qui est exclus.

**2.** Montrer que $D$ est homotope à l'application constante et donc que $S^\infty$ est contractile.

Corrigé: on peut poser directement $H(x,t) = (\sin(\pi t/2), \cos(\pi t/2)x)$. C'est une homotopie entre $D$ et une application constante. Avec la question précédente, on conclut que l'identité de $S^\infty$ est homotope à une application constante, donc $S^\infty$ est contractile.

**3.** Soit $X$ et $Y$ deux CW-complexes connexes par arcs qui ont pour unique 0-cellule $x$ et $y$ respectivement et dont les groupes d'homotopie supérieurs sont triviaux. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\phi : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.

Montrer qu'il existe une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x) = y$ et $f_* = \phi$. On pourra la construire par récurrence sur le squelette de $X$.

Corrigé: On définit bien-sûr $f$ sur le 0-squelette en posant $f(x) = y$. Chaque 1-cellule $e$ de $X$ est paramétrée par une application $\gamma_e : [0,1] \to X$ avec $\gamma_e(0) = \gamma_e(1) = x$. Elle représente un élément $[\gamma_e] \in \pi_1(X, x)$ qui doit être envoyé sur $\phi([\gamma_e])$. On choisit un lacet $\delta_e : [0,1] \to Y$ représentant cette classe dans $\pi_1(Y, y)$ et on pose $f(\gamma_e(t)) = \delta_e(t)$. Comme les lacets $[\gamma_e]$ engendrent le groupe fondamental, on aura bien $f_* = \phi$.
Passons au 2-squelette: on fixe une 2-cellule $\gamma : (D^2, S^1) \to (X^2, X^1)$. La restriction de $\gamma$ au bord est un lacet $\partial\gamma$ librement homotope à 0 dans $X$. L'application $f$ est déjà définie sur le bord et on a $[f \circ \partial\gamma] = \phi([\partial\gamma]) = 0$. Ainsi, on peut prolonger $f$ à l'interieur du disque, ce qui permet de prolonger $f$ à $X^2$ tout entier.
On continue avec les $n$-cellules ($n$¿2). Une telle cellule correspond à une application $\gamma : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$: $f$ est déjà définie au bord et on a $[f \circ \partial\gamma] \in \pi_{n-1}(Y)$ qui est nul par hypothèse. On peut donc prolonger $f$ indéfiniment, ce qui termine la preuve.

**4.** Montrer que deux applications $f_1, f_2 : X \to Y$ comme ci-dessus sont nécessairement homotopes, puis que $X$ et $Y$ sont homotopiquement équivalents.

Corrigé: Supposons que $f_1$ et $f_2$ envoient toutes les deux $x$ sur $y$. On veut construire par récurrence sur le squelette une homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ entre $f_1$ et $f_2$ qui soit égale à $y$ sur $\{x\} \times [0,1]$. On observe d'une part que comme précédemment, l'extension est automatique sur les cellules de dimension $\geq 3$ et d'autre part que les cellules du produit sont de trois types: $e \times \{0\}, e \times \{1\}, e \times [0,1]$ pour une cellule $e$ de $X$. Ainsi les seules 2-cellules sur lesquelles il reste à définir $H$ sont de la forme $e \times [0,1]$ pour une 1-cellule de $X$. La construction de $f_1$ et $f_2$ fait que les restrictions de $H$ aux extrémités $e \times \{0\}$ et $e \times \{1\}$ sont homotopes: on peut donc les prolonger à l'interieur. Cela termine la construction de $H$.

**5.** Construire un CW-complexe $X$ avec une seule 0-cellule et tel que $\pi_1(X, x) = G$, puis $\pi_n(X, x) = 0$ pour tout $n \geq 2$ dans le cas où $G = \mathbb{Z}, F_2$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On utilisera librement la question 1 de l'exercice 1.

Corrigé: Pour le premier exemple, on prend bien sûr le cercle formé d'une 0-cellule et une 1-cellule. Son revêtement universel, $\mathbb{R}$, est contractile, donc ses groupes fondamentaux supérieurs sont triviaux. D'après la question 1. de l'exercice 1. il en est de même de $S^1$.
Pour le deuxième exemple, on prend un bouquet de deux cercles, formé d'une 0-cellule et de deux 1-cellules. Son revêtement universel est un arbre, donc contractile (pour le prouver, il suffit de choisir un point $x_0$ puis de ramener continûment chaque point $x$ en $x_0$ par le plus court chemin.
Pour le troisième exemple, on fait agir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $S^\infty$ par $x \mapsto -x$. Cette action est propre et libre et le quotient $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ vérifie bien les hypothèses. Il faut voir que c'est un CW-complexe, et pour cela construire une structure de CW complexe sur $S^\infty$ compatible avec l'action. On la construit en décomposant chaque $S^n \subset S^\infty$ en deux disques $D^n$ recollés sur leur équateur $S^{n-1}$.

⋆⋆⋆

**Exercice 3:** Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. On veut montrer qu'il existe une base orthonormée directe $(u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = f(v) = f(w)$.

**1.** Soit $\mathrm{SO}_3$ le groupe des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{so}(3) \subset M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques qu'on munit du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(XY)$. Montrer que $\exp : \mathrm{so}_3 \to \mathrm{SO}_3$ se restreint en une surjection continue $\exp : B(0, \pi) \to \mathrm{SO}_3$.

Corrigé: toute rotation $R \in \mathrm{SO}_3$ est déterminée par un axe $D$ (une droite vectorielle orientée) et un angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. En choisissant une base orthonormée adaptée, on a alors

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\xi) \text{ où } \xi = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, en changeant l'orientation de l'axe, on change le signe de $\theta$ ce qui prouve qu'on peut se ramener à $\theta \in [0, \pi]$. On calcule $\langle \xi, \xi\rangle = \theta^2$ ce qui prouve le résultat.

**2.** Montrer que exp réalise un homéomorphisme entre $\mathrm{SO}_3$ et un quotient de $B(0, \pi)$ qu'on précisera, puis en déduire l'identité $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corrigé: Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de $\xi, \xi' \in B(0, \pi)$ on a $\exp(\xi) = \exp(\xi')$ mais c'est clair quand on observe que $\exp(\xi)$ est une rotation d'axe $\ker \xi$ et d'angle $||\xi||$: deux telles rotations doivent avoir le même axe et le même angle. On a donc $\xi = \xi'$ ou $||\xi|| = ||\xi'||$ et $\xi' = -\xi$. En notant $\sim$ cette relation d'équivalence, exp induit par compacité un homéomorphisme $B(0, \pi)/ \sim \to \mathrm{SO}_3$. En quotientant une sphère $S^3$ par antipodie, on constate que $D^3$ est un domaine fondamental de sorte que la relation d'équivalence sur le bord coincide avec $\sim$. Ainsi $\mathrm{SO}_3 \simeq S^3/\{\pm 1\}$. Comme $S^3$ est simplement connexe, on a $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**3.** Soit $e_0, e_1, e_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C \in \mathrm{SO}_3$ l'élément défini par $Ce_i = e_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On note $\Gamma$ le sous-groupe de $\mathrm{SO}_3$ engendré par $C$, $X$ le quotient $\mathrm{SO}_3/\Gamma$ et $p : \mathrm{SO}_3 \to X$ la projection canonique. Montrer que $p$ est un revêtement galoisien et calculer son groupe d'automorphismes.

Corrigé: $\Gamma$ un sous-groupe d'ordre 3 agissant par multiplication à droite de façon propre et libre. Le quotient est alors un revêtement galoisien de groupe $\Gamma$: cela répond à la question.

**4.** Montrer qu'on a $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Corrigé: pour tout revêtement $p : X \to B$ galoisien de groupe $\Gamma$ ($X, B$ connexes par arcs) on a la suite exacte $0 \to \pi_1(X) \to \pi_1(B) \to \Gamma \to 0$. Avec les notations de la question cela s'écrit $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0$. On peut alors argumenter qu'une telle extension est forcément triviale (car il y a une section et car il n'y a pas d'action non triviale de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). On peut aussi explicitement trouver un élément d'ordre 6. Construire un chemin $\gamma : \theta \to C_\theta$ de rotations d'axe $(1, 1, 1)$ et d'angle $\theta \in [0, 2\pi/3]$. Le chemin $\gamma^3$ représente la même famille mais pour $\theta \in [0, 2\pi]$: c'est le générateur de $\pi_1\mathrm{SO}_3$ d'après la description précédente. Dans les deux cas, on conclut que $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**5.** Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour toute base orthonormée directe $(u, v, w)$ on n'ait pas $f(u) = f(v) = f(w)$. Posons $j = e^{2i\pi/3}$ et définissons $g : \mathrm{SO}_3 \to \mathbb{C}$ par $g(A) = f(Ae_0) + jf(Ae_1) + j^2 f(Ae_2)$: montrer que $g$ prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et calculer $g(AC)$.

Corrigé: On a $g(A) = (f(Ae_0) - f(Ae_2) + (f(Ae_1) - f(Ae_2))j$ dans la $\mathbb{R}$-base $1, j$ de $\mathbb{C}$. Ainsi $g(A) = 0 \implies f(Ae_0) = f(Ae_2)$ et $f(Ae_1) = f(Ae_2)$, ce qui est impossible. Un calcul direct montre que $g(AC) = j^2 g(C)$.

**6.** Soit $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $q(z) = z^3$. Montrer qu'il existe deux applications continues $h, l : X \to \mathbb{C}^*$ faisant commuter le diagramme suivant puis conclure.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SO}_3 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C}^* \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[ur, "l"] & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

Corrigé: déjà on remarque que l'application $q$ passe au quotient par l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$ définie par $z \mapsto jz$. Ainsi $q$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On calcule maintenant $q(g(AC)) = g(AC)^3 = j^6 g(A) = g(A)$ ainsi $q \circ g$ passe au quotient et induit une application $h : X \to \mathbb{C}^*$.
Pour montrer que $l$ existe, on applique le théorème du relèvement: il suffit que $h_* \pi_1(X) \subset q_* \pi_1(\mathbb{C}^*)$. Mais $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$ (sans torsion) et $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (de torsion): le morphisme $h_*$ est nécessairement trivial et le théorème s'applique.
Pour conclure, on voit que d'une part $l \circ p(AC) = l(p(A))$ et d'autre part $g(AC) = j^2 g(A)$. Ces deux égalités sont contradictoires si, comme on le prétend, $g = l \circ p$.