

Signatures des représentations quantiques et noeuds à deux ponts

Julien Marché



Foncteurs modulaires

Fixons un ensemble fini Λ et notons $S_{g,n}$ une surface de genre g munie de n points marqués. On se donne pour tout $g \geq 0$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ un espace vectoriel $W(S_{g,n}, \lambda)$ et une représentation (projective)

$$\rho_{g,n}^\lambda : \text{Mod}(S_{g,n}) \rightarrow \text{PGL}(W(S_{g,n}, \lambda)).$$

Foncteurs modulaires

Fixons un ensemble fini Λ et notons $S_{g,n}$ une surface de genre g munie de n points marqués. On se donne pour tout $g \geq 0$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ un espace vectoriel $W(S_{g,n}, \lambda)$ et une représentation (projective)

$$\rho_{g,n}^\lambda : \text{Mod}(S_{g,n}) \rightarrow \text{PGL}(W(S_{g,n}, \lambda)).$$

Ces représentations vérifient la règle de fusion: si $S'_{g',n+2}$ est obtenue en pinçant $S_{g,n}$ le long d'une courbe simple γ , on a la décomposition:

$$W(S_{g,n}, \lambda) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} W(S'_{g',n+2}, \lambda, \mu, \mu).$$

Cette décomposition est compatible avec l'action du stabilisateur de γ dans $\text{Mod}(S_{g,n})$.

Exemples SU_2/SO_3

La même équation avec une figure:

$$W(\text{figure avec } \gamma) = \bigoplus_{\mu} W(\text{figure avec } \mu)$$

On s'intéresse ici à deux familles d'exemples indexées par r impair.
La famille SU_2 pour laquelle $\Lambda = \{0, \dots, r-2\}$ et la famille SO_3
pour laquelle $\Lambda^+ = \{0, 2, \dots, r-3\} = \Lambda \cap 2\mathbb{Z}$.

Exemples SU_2/SO_3

La même équation avec une figure:

$$W(\text{général}) = \bigoplus_{\mu} W(\mu)$$

On s'intéresse ici à deux familles d'exemples indexées par r impair. La famille SU_2 pour laquelle $\Lambda = \{0, \dots, r-2\}$ et la famille SO_3 pour laquelle $\Lambda^+ = \{0, 2, \dots, r-3\} = \Lambda \cap 2\mathbb{Z}$. En utilisant récursivement l'équation ci-dessous, on peut ramener le calcul de W au cas d'une sphère avec 3 points marqués. Dans l'exemple qui nous intéresse on a

$$W(S^2, i, j, k) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } a \leq b+c, b \leq a+c, c \leq a+b, \\ & a+b+c \text{ pair et } a+b+c \leq 2r-4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Algèbre de Verlinde

On a aussi $W(S^2, i, j) = \mathbb{C}$ si $i = j$ et 0 sinon. Une façon d'encoder ces informations est de créer une *algèbre de Frobenius*: on considère

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda} \mathbb{Q}e_i$$

Algèbre de Verlinde

On a aussi $W(S^2, i, j) = \mathbb{C}$ si $i = j$ et 0 sinon. Une façon d'encoder ces informations est de créer une *algèbre de Frobenius*: on considère

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda} \mathbb{Q}e_i$$

que l'on munit d'une forme bilinéaire symétrique η et trilinéaire symétrique ω définies comme suit:

$$\begin{cases} \eta(e_i, e_j) = \dim W(S^2, i, j) = \delta_{i,j}, \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = \dim W(S^2, i, j, k) \end{cases}$$

Algèbre de Verlinde

On a aussi $W(S^2, i, j) = \mathbb{C}$ si $i = j$ et 0 sinon. Une façon d'encoder ces informations est de créer une *algèbre de Frobenius*: on considère

$$V = \bigoplus_{i \in \Lambda} \mathbb{Q}e_i$$

que l'on munit d'une forme bilinéaire symétrique η et trilinéaire symétrique ω définies comme suit:

$$\begin{cases} \eta(e_i, e_j) = \dim W(S^2, i, j) = \delta_{i,j}, \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = \dim W(S^2, i, j, k) \end{cases}$$

On définit un produit sur V défini par $\omega(x, y, z) = \eta(x \cdot y, z)$ et une forme linéaire ϵ par $\epsilon(x) = \eta(x, 1)$.

Remarque: Les données (η, ω) et (\cdot, ϵ) sont équivalentes.

Formule de Verlinde

Notons $\eta^{-1} = \sum x_i \otimes y_i$ et $\Omega = \sum x_i y_i$ (ici $\Omega = \sum e_i^2$). Ce vecteur est lié à ϵ par la formule $\epsilon(x) = \text{Tr}_{V/\mathbb{Q}}(\Omega^{-1}x)$. On a alors

$$\dim W(S_{g,n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \epsilon(\Omega^g e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}).$$

Un calcul montre que $V = \mathbb{Q}[i(t + t^{-1})]/(t^{2r} - 1)$ et $\Omega = \frac{-2r}{(t-t^{-1})^2}$ d'où la formule de Verlinde:

$$\dim W(S_g) = \left(\frac{r}{2}\right)^{g-1} \sum_{k=1}^{r-1} \sin\left(\frac{k\pi}{r}\right)^{2-2g}.$$

Formule de Verlinde

Notons $\eta^{-1} = \sum x_i \otimes y_i$ et $\Omega = \sum x_i y_i$ (ici $\Omega = \sum e_i^2$). Ce vecteur est lié à ϵ par la formule $\epsilon(x) = \text{Tr}_{V/\mathbb{Q}}(\Omega^{-1}x)$. On a alors

$$\dim W(S_{g,n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \epsilon(\Omega^g e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}).$$

Un calcul montre que $V = \mathbb{Q}[i(t + t^{-1})]/(t^{2r} - 1)$ et $\Omega = \frac{-2r}{(t-t^{-1})^2}$ d'où la formule de Verlinde:

$$\dim W(S_g) = \left(\frac{r}{2}\right)^{g-1} \sum_{k=1}^{r-1} \sin\left(\frac{k\pi}{r}\right)^{2-2g}.$$

On peut montrer que pour r impair fixé, les coefficients de $\rho_{g,n}^\lambda$ sont à valeurs dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_{4r})$ et préservent une forme hermitienne à coefficients dans ce corps.

Question: si on change ζ_{4r} par un automorphisme de Galois, que devient la signature de $W(S_{g,n}, \lambda)$?

Interprétation géométrique

Variante avec $\Lambda^+ = \{0, 2, \dots, r - 3\}$, donne des représentations ρ^+ dites SO_3 satisfaisant des propriétés similaires.

Propriété: Pour toute courbe simple γ et twist de Dehn T_γ ,

$$\rho(T_\gamma)^r = 1.$$

Interprétation géométrique

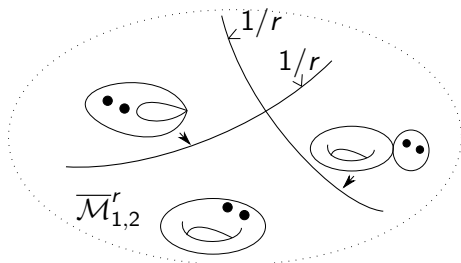
Variante avec $\Lambda^+ = \{0, 2, \dots, r-3\}$, donne des représentations ρ^+ dites SO_3 satisfaisant des propriétés similaires.

Propriété: Pour toute courbe simple γ et twist de Dehn T_γ ,

$$\rho(T_\gamma)^r = 1.$$

$\text{Mod}(S_{g,n}) = \pi_1(\mathcal{M}_{g,n})$, où $\mathcal{M}_{g,n}$ est l'espace des modules des courbes de genre g avec n points marqués.

$\text{Mod}(S_{g,n})^r = \text{Mod}(S_{g,n}) / \langle T_\gamma^r \rangle = \pi_1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^r)$. Dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^r$, chaque diviseur de bord, correspondant à un type topologique de courbe nodale (ou de courbe simple) présente une ramification d'ordre r .



Exemples

Exemple 1: $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}^r \simeq \mathbb{P}^1(r, r, r)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,4})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemples

Exemple 1: $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}^r \simeq \mathbb{P}^1(r, r, r)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,4})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemple 2: $\overline{\mathcal{M}}_{1,0}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,0})^r \rightarrow \text{PU}((r - 1)/2)$ est la représentation métaplectique d'ordre r (d'image finie).

Exemples

Exemple 1: $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}^r \simeq \mathbb{P}^1(r, r, r)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,4})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemple 2: $\overline{\mathcal{M}}_{1,0}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,0})^r \rightarrow \text{PU}((r - 1)/2)$ est la représentation métaplectique d'ordre r (d'image finie).

Exemple 3: $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$, $\lambda = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,1})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemples

Exemple 1: $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}^r \simeq \mathbb{P}^1(r, r, r)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,4})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemple 2: $\overline{\mathcal{M}}_{1,0}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,0})^r \rightarrow \text{PU}((r - 1)/2)$ est la représentation métaplectique d'ordre r (d'image finie).

Exemple 3: $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$, $\lambda = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,1})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemple 4: $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^5$ est la surface de Hirzebruch, et
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,5})^5 \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ est sa représentation d'uniformisation.

Exemples

Exemple 1: $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}^r \simeq \mathbb{P}^1(r, r, r)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,4})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemple 2: $\overline{\mathcal{M}}_{1,0}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,0})^r \rightarrow \text{PU}((r - 1)/2)$ est la représentation métaplectique d'ordre r (d'image finie).

Exemple 3: $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}^r \simeq \mathbb{P}^1(2, 3, r)$, $\lambda = r - 3$.
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{1,1})^r \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ est la représentation d'uniformisation.

Exemple 4: $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}^5$ est la surface de Hirzebruch, et
 $\rho^+ : \text{Mod}(S_{0,5})^5 \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ est sa représentation d'uniformisation.

Autres exemples: Deroin-M, structures hyperboliques complexes sur $\overline{\mathcal{M}}_{1,2}^5, \overline{\mathcal{M}}_{1,3}^5, \overline{\mathcal{M}}_{2,1}^5$. Oubli holomorphe: $\overline{\mathcal{M}}_{1,3}^5 \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{1,2}^5$.

Structure hermitienne

Dans le cas SU_2 avec q racine primitive $2r$ -ième de l'unité, il existe une structure pseudo-hermitienne invariante sur $W(S_{g,n}, \lambda)$.

$$\text{Sign } W(S^2, j, j) = (-1)^j \epsilon_{j+1} \text{ avec } \epsilon_j = \text{Sign}([j]) \text{ et } [j] = \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}.$$

Explicitement, si $q = \exp(i\pi s/r)$ avec $0 < s < r$ impair et premier à r on a $\epsilon_j = (-1)^{\lfloor sj/r \rfloor}$.

Structure hermitienne

Dans le cas SU_2 avec q racine primitive $2r$ -ième de l'unité, il existe une structure pseudo-hermitienne invariante sur $W(S_{g,n}, \lambda)$.

$$\text{Sign } W(S^2, j, j) = (-1)^j \epsilon_{j+1} \text{ avec } \epsilon_j = \text{Sign}([j]) \text{ et } [j] = \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}.$$

Explicitement, si $q = \exp(i\pi s/r)$ avec $0 < s < r$ impair et premier à r on a $\epsilon_j = (-1)^{\lfloor sj/r \rfloor}$.

$$\text{Sign } W(S^2, i, j, k) = \text{Sign}\left((-1)^{a+b+c} \frac{[a+b+c+1]![a]![b]![c]!}{[i]![j]![k]!}\right)$$

où $[n]! = [n][n-1] \cdots [1]$ et $i = b+c, j = a+c, k = a+b$.

Structure hermitienne

Dans le cas SU_2 avec q racine primitive $2r$ -ième de l'unité, il existe une structure pseudo-hermitienne invariante sur $W(S_{g,n}, \lambda)$.

$$\text{Sign } W(S^2, j, j) = (-1)^j \epsilon_{j+1} \text{ avec } \epsilon_j = \text{Sign}([j]) \text{ et } [j] = \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}.$$

Explicitement, si $q = \exp(i\pi s/r)$ avec $0 < s < r$ impair et premier à r on a $\epsilon_j = (-1)^{\lfloor sj/r \rfloor}$.

$$\text{Sign } W(S^2, i, j, k) = \text{Sign}\left((-1)^{a+b+c} \frac{[a+b+c+1]![a]![b]![c]!}{[i]![j]![k]!}\right)$$

où $[n]! = [n][n-1] \cdots [1]$ et $i = b+c, j = a+c, k = a+b$.

Remarque: La décomposition de $W(S_{g,n}, \lambda)$ le long d'une courbe est orthogonale ce qui permet de réduire le calcul de la signature aux cas de la sphère à deux et trois trous.

Algèbre de Frobenius signée

On définit $V_q = \bigoplus_{i=0}^{r-2} \mathbb{Q}e_i$ et deux formes η, ω bi-trilinéaires symétriques par les formules

$$\eta(e_j, e_j) = \text{Sign } W(S^2, j, j), \quad \omega(e_i, e_j, e_k) = \text{Sign } W(S^2, i, j, k).$$

V_q calcule la signature de la théorie $SU(2)$ par la formule précédente:

$$\text{Sign } W(S_{g,n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \epsilon(\Omega^g e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}).$$

Algèbre de Frobenius signée

On définit $V_q = \bigoplus_{i=0}^{r-2} \mathbb{Q}e_i$ et deux formes η, ω bi-trilinéaires symétriques par les formules

$$\eta(e_j, e_j) = \text{Sign } W(S^2, j, j), \quad \omega(e_i, e_j, e_k) = \text{Sign } W(S^2, i, j, k).$$

V_q calcule la signature de la théorie $SU(2)$ par la formule précédente:

$$\text{Sign } W(S_{g,n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \epsilon(\Omega^g e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}).$$

On définit V_q^+ comme la sous-algèbre engendrée par les e_{2j} .

Exemples: Si $q = \exp(i\pi/r)$ on a $V_q = V$.

Si $q = \exp(i\pi/5)$ on a $V_q^+ = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - x - 1)$, si $q = \exp(3i\pi/5)$ on a $V_q^+ = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$.

Algèbre de Frobenius signée

On définit $V_q = \bigoplus_{i=0}^{r-2} \mathbb{Q}e_i$ et deux formes η, ω bi-trilinéaires symétriques par les formules

$$\eta(e_j, e_j) = \text{Sign } W(S^2, j, j), \quad \omega(e_i, e_j, e_k) = \text{Sign } W(S^2, i, j, k).$$

V_q calcule la signature de la théorie $SU(2)$ par la formule précédente:

$$\text{Sign } W(S_{g,n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \epsilon(\Omega^g e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}).$$

On définit V_q^+ comme la sous-algèbre engendrée par les e_{2j} .

Exemples: Si $q = \exp(i\pi/r)$ on a $V_q = V$.

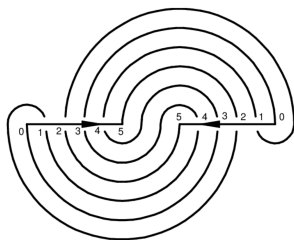
Si $q = \exp(i\pi/5)$ on a $V_q^+ = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - x - 1)$, si $q = \exp(3i\pi/5)$ on a $V_q^+ = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$.

Conjecture: si r est premier, V_q est un corps de nombres.

Théorème principal

A droite, le noeud $K(5, 3)$.

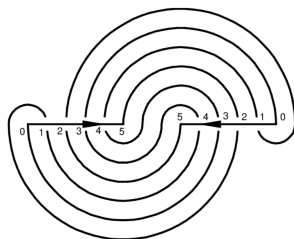
Le noeud à deux ponts $K(r, s)$ est l'unique noeud dans S^3 dont le revêtement double ramifié est l'espace lenticulaire $L(r, s)$.



Théorème principal

A droite, le noeud $K(5, 3)$.

Le noeud à deux ponts $K(r, s)$ est l'unique noeud dans S^3 dont le revêtement double ramifié est l'espace lenticulaire $L(r, s)$.



Théorème: l'algèbre V_q^+ est le corps des traces du noeud à deux ponts $K(r, s)$ (formulation précise à suivre).

Applications:

1. La TQFT $SO(3)$ associée à q est unitaire si et seulement si $K(r, s)$ est hyperbolique, ssi $s = 1$.
2. Les algèbres V_q et $V_{q'}$ sont isomorphes ssi $K(r, s)$ et $K(r', s')$ sont isotopes, ssi $r' = r$ et $s' = s$ ou $s' = s^{-1}$ modulo r .
3. Quelle est l'explication conceptuelle du théorème?

Représentations paraboliques

A partir du diagramme de $K(r, s)$ on obtient une présentation de $G = \pi_1(S^3 \setminus K(r, s))$ avec deux générateurs et une relation:

$$G = \langle u, v \mid wu = vw \rangle, \quad w = u^{\epsilon_1} v^{\epsilon_2} \dots u^{\epsilon_{r-2}} v^{\epsilon_{r-1}}.$$

Représentations paraboliques

A partir du diagramme de $K(r, s)$ on obtient une présentation de $G = \pi_1(S^3 \setminus K(r, s))$ avec deux générateurs et une relation:

$$G = \langle u, v \mid wu = vw \rangle, \quad w = u^{\epsilon_1} v^{\epsilon_2} \dots u^{\epsilon_{r-2}} v^{\epsilon_{r-1}}.$$

Si $K(r, s)$ est hyperbolique, sa représentation d'uniformisation peut se mettre sous la forme la forme $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ avec

$$\rho(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

Représentations paraboliques

A partir du diagramme de $K(r, s)$ on obtient une présentation de $G = \pi_1(S^3 \setminus K(r, s))$ avec deux générateurs et une relation:

$$G = \langle u, v \mid wu = vw \rangle, \quad w = u^{\epsilon_1} v^{\epsilon_2} \dots u^{\epsilon_{r-2}} v^{\epsilon_{r-1}}.$$

Si $K(r, s)$ est hyperbolique, sa représentation d'uniformisation peut se mettre sous la forme la forme $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ avec

$$\rho(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\rho(w) = \begin{pmatrix} R(x) & * \\ * & * \end{pmatrix}$ où R est le polynôme de Riley: ρ est une représentation de G ssi $R(x) = 0$.

Théorème: $V_q^+ \simeq \mathbb{Q}[X]/(R(X))$.

Polynômes orthogonaux et continuants

Par définition de V_q la matrice de la multiplication par e_1 est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1\epsilon_2 & & & & \\ 1 & 0 & -\epsilon_2\epsilon_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & -\epsilon_{r-2}\epsilon_{r-1} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant $P_{r-1} = \det(M + XI)$ on a $V_q \simeq \mathbb{Q}[X]/P_{r-1}(X)$.

Polynômes orthogonaux et continuants

Par définition de V_q la matrice de la multiplication par e_1 est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1\epsilon_2 & & & & \\ 1 & 0 & -\epsilon_2\epsilon_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & -\epsilon_{r-2}\epsilon_{r-1} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant $P_{r-1} = \det(M + XI)$ on a $V_q \simeq \mathbb{Q}[X]/P_{r-1}(X)$.

On introduit maintenant le continuant:

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 & -1 & & & \\ 1 & x_2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & x_{n-1} & -1 \\ & & & & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_n(x_1, \dots, x_n) & K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ K_{n-1}(x_2, \dots, x_n) & K_{n-2}(x_2, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fractions continues

Après quelques manipulations algébriques, on obtient la formule $P_{r-1}(X) = R(X^2)$ qui établit le théorème principal.

Fractions continues

Après quelques manipulations algébriques, on obtient la formule $P_{r-1}(X) = R(X^2)$ qui établit le théorème principal.

Une façon élégante de présenter les formules utilise les fractions continues: on écrit

$$\frac{P_{r-1}}{P_{r-2}} = X + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{X + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{X + \frac{\dots}{X + \frac{\epsilon_{r-2} \epsilon_{r-1}}{\dots + \frac{\epsilon_{r-2} \epsilon_{r-1}}{X}}}}$$

de sorte que $V_q = \mathbb{Q}[X]/P_{r-1}(X)$ et

$$\epsilon(f) = \sum_{x \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_x \frac{f P_{r-2}}{P_{r-1}}.$$

Fractions continues

Après quelques manipulations algébriques, on obtient la formule $P_{r-1}(X) = R(X^2)$ qui établit le théorème principal.

Une façon élégante de présenter les formules utilise les fractions continues: on écrit

$$\frac{P_{r-1}}{P_{r-2}} = X + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{X + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{X + \frac{\dots}{X + \frac{\epsilon_{r-2} \epsilon_{r-1}}{X}}}}$$

de sorte que $V_q = \mathbb{Q}[X]/P_{r-1}(X)$ et

$$\epsilon(f) = \sum_{x \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_x \frac{f P_{r-2}}{P_{r-1}}.$$

Remarque: On a $P_{r-2}^2 = -1$ modulo P_{r-1} donc $V_q = V_q^+[i]$.

Pistes de recherche

1. Une algèbre de Frobenius est une TQFT de dimension $1+1$. Chercher des cobordismes de dimension 4 entre espaces lenticulaires $L(r, s)$ dont les signatures reproduisent l'algèbre de Frobenius précédente.

Pistes de recherche

1. Une algèbre de Frobenius est une TQFT de dimension $1+1$. Chercher des cobordismes de dimension 4 entre espaces lenticulaires $L(r, s)$ dont les signatures reproduisent l'algèbre de Frobenius précédente.
2. La signature de la TQFT est le degré 0 d'une théorie cohomologique des champs. Calculer les invariants de Toledo des représentations quantiques. D'après le théorème de reconstruction de Givental-Teleman, cela revient à décrire un certain endomorphisme de V_q^+ .

Pistes de recherche

- 1.** Une algèbre de Frobenius est une TQFT de dimension $1+1$. Chercher des cobordismes de dimension 4 entre espaces lenticulaires $L(r, s)$ dont les signatures reproduisent l'algèbre de Frobenius précédente.
- 2.** La signature de la TQFT est le degré 0 d'une théorie cohomologique des champs. Calculer les invariants de Toledo des représentations quantiques. D'après le théorème de reconstruction de Givental-Teleman, cela revient à décrire un certain endomorphisme de V_q^+ .
- 3.** La récurrence topologique déduit la structure précédente d'une "courbe spectrale" (une courbe algébrique plane). Trouver cette courbe à partir de la variété des caractères des noeuds à deux ponts.