Groupes commutatifs qui sont le π_1 d'une variété de dimension 3 compacte orientée

19 avril 2001

1 Une condition nécessaire

Soit M une variété connexe compacte orientée de dimension 3. On va supposer de plus que M est irréductible : c'est à dire que tout plongement de S^2 découpe M en deux composantes connexes dont l'une est une boule.

On montre alors que $\pi_2(M) = 0$. Ceci est une conséquence directe du lemme de Dehn : toute application de $S^2 \to M$ est homotope à un plongement. Comme M est irréductible, on peut rétracter M du côté que S^2 découpe comme une boule.

Si on rajoute à M des anses d'indice 4 et plus, on pourra tuer successivement le π_3, π_4,etc...et construire un plongement $M \to \widetilde{M}$ où $\widetilde{M}$ est un espace $K(\pi_1(M), 1)$. On remarque d'ailleurs que comme $\widetilde{M}$ n'a qu'une 3-cellule, $H_3(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$ est un quotient de $\mathbb{Z}$. Puis, comme l'ajout de 4-cellules et plus ne change pas l'homologie (ni la cohomologie) en dimension 0,1 et 2, $H_i(\widetilde{M}) = H_i(M)$ pour $i = 0, 1, 2$.

Cependant, M est une variété compacte orientée et donc satisfait la dualité de Poincaré. Ainsi, $H_2(M, \mathbb{Z}) = H^1(M, \mathbb{Z}) = \hom(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, puisque $H_0(M, \mathbb{Z})$ est libre. On en déduit que $H_2(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$ est égal à la partie libre de $H_1(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$.

Mais comme $\widetilde{M}$ est un espace $K(\pi_1(M), \mathbb{Z})$, l'égalité ci-dessus s'interprête comme une condition sur l'homologie du groupe $\pi_1(M)$.

2 Application aux π_1 commutatifs

2.1 Calcul des π_1 possibles

Supposons que $\pi_1(M)$ est commutatif, alors $H_1(M) = \pi_1(M) = \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_i \mathbb{Z}/\alpha_i\mathbb{Z}$.

On peut montrer en construisant explicitement les $K(\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z})$ que $H_2(\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}) = 0$. Par la formule de Künneth,

$H_2(G_1 \oplus G_2) = H_2(G_1) \oplus H_2(G_2) \oplus H_1(G_1) \otimes H_1(G_2) \oplus \mathrm{Tor}(G_1, G_2) = H_2(G_1) \oplus H_2(G_2) \oplus (G_1 \otimes G_2) \oplus \mathrm{Tor}(G_1, G_2)$.

On calcule alors par récurrence,

$$H_2(\bigoplus_i \mathbb{Z}/\alpha_i\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i<j} (\mathbb{Z}/(\alpha_i \wedge \alpha_j)\mathbb{Z})^2,$$

puis $H_2(\mathbb{Z}^n) = H_2((S^1)^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{C_n^2}$. Donc

$$H_2(\pi_1(M)) = \mathbb{Z}^{C_n^2} \oplus (\bigoplus_{i<j} (\mathbb{Z}/(\alpha_i \wedge \alpha_j)\mathbb{Z})^2)^{C_n^2+1}.$$

La condition imposée par le fait que $\pi_1(M)$ provienne d'une variété de dimension 3 irréductible se traduit par le fait que $H_2(\pi_1(M))$ soit libre et de même rang que $\pi_1(M)$. On en déduit donc que $n = C_n^2$ et que les α_i sont premiers entre eux deux à deux. La première condition implique que n vaut 0 ou 3.

Enfin, on veut utiliser le fait que $H_3(\widetilde{M})$ est un quotient de $\mathbb{Z}$. Par la formule de Künneth, on dispose de la formule :

$$H_3(G_1 \oplus G_2) = H_3(G_2) \oplus H_1(G_1) \otimes H_2(G_2) \oplus H_2(G_1) \otimes H_1(G_2) \oplus H_3(G_1) \oplus \mathrm{Tor}(H_2(G_1), H_2(G_2))$$

Comme $H_3(\mathbb{Z}^n) = H_3((S^1)^n) = C_n^3$, ceci vaut donc 1 ou 0. Si $n = 3$, on en déduit que $H_3(\pi_1(M))$ est sans torsion, et si $n = 0$, on en déduit que $H_3(\pi_1(M))$ est cyclique.

Comme $H_3(\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$, on en déduit que le H_3 d'un groupe fini commutatif le contient comme facteur. Cela signifie que si $n = 0$, $\pi_1(M)$ est cyclique, et si $n = 3$, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^3$.

On conclut que toute variété compacte orientée irréductible de dimension 3 de π_1 commutatif ne peut avoir pour π_1 qu'un groupe cyclique ou $\mathbb{Z}^3$.

2.2 Suppression de l'hypothèse d'irréductibilité

On dit qu'une variété de dimension 3 est première si elle ne s'écrit pas comme somme connexe de deux variétés différentes de S^3. En particulier, une variété irréductible est première. On peut montrer (c'est difficile) que toute variété de dimension 3 se décompose comme somme connexe finie de variétés premières (même de façon unique).

Soit M une variété première non irréductible. Cela signifie qu'il existe une sphère plongée S dans M qui découpe M en une seule composante connexe. Soit dans $M \setminus S$ deux points situés de part et d'autre de S. Comme $M \setminus S$ est connexe, on peut les relier par un chemin γ, et comme on est dans une variété de dimension 3, on peut supposer que ce chemin est plongé. Considérons un voisinage tubulaire U de $S \cup \gamma$ dans M et Σ son bord. Alors c'est une sphère qui est bordée à l'intérieur par une variété de dimension 3 de $\pi_1 = \mathbb{Z}$ qui n'est donc pas une boule. Comme M est irréductible, cela signifie que le complémentaire de U est une boule.

On peut alors appliquer le théorème de Van-Kampen, et conclure que le π_1 de cette variété est celui de U, soit $\mathbb{Z}$.

Soit maintenant une variété compacte orientée de dimension 3 dont le π_1 est commutatif. Elle se décompose en somme directe de variétés premières et son π_1 est le produit libre des π_1 de ses facteurs par le théorème de Van-Kampen. Pour que son π_1 soit commutatif, il faut que tous les π_1 sauf 1 soient triviaux, donc on peut supposer que M était irréductible ou de $\pi_1 = \mathbb{Z}$.

On en déduit que les seuls π_1 possibles sont :

$$\mathbb{Z}/n (n \geq 0),\ \mathbb{Z}^3.$$

Ces π_1 sont effectivement réalisés par les espaces lenticulaires $L(n, 1)$, et $S^1 \times S^1 \times S^1$.