Distance entre le nœud de huit et le nœud de trèfle

Julien Marché

Avril 2005

Abstract

Le but de ce court article est de montrer comment calculer la distance entre les nœuds les plus simples. Les résultats ne sont pas originaux, mais l'accent est mis sur l'exposition et la simplicité des énoncés et des preuves.

Considérons les deux nœuds ci-dessous:

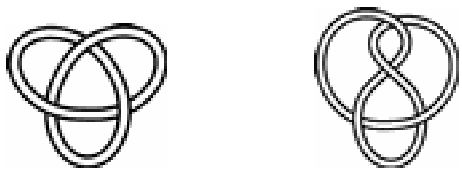


Figure 1: Le nœud de trèfle gauche et le nœud de huit

On notera le nœud de trèfle gauche 3.1 et le nœud de huit 4.1 conformément la table de D. Rolfsen (voir [2]). On réfère à l'excellente adresse ci-dessous pour un atlas des nœuds en ligne dont sont tirés les dessins et les données numériques présents dans ce texte:
`http://www.math.toronto.edu/ drorbn/KAtlas/Knots/index.html`

On remarque que pour chacun de ces nœuds, si on change un seul des croisements matérialisés sur la figure, le nœud devient trivial (le nœud trivial sera noté 0.1).

Question 1. *Peut-on obtenir le nœud de huit à partir du nœud de trèfle gauche en changeant un seul croisement?*

Bien entendu, si un tel croisement existe, ce croisement n'apparaît pas comme un point double de la figure 1. Cependant, la notion de changement de croisement peut être définie intrinsèquement, c'est à dire sans faire référence à une projection plane.

Dans la suite, on prouve que la réponse à la question est non. C'est-à-dire que pour passer du nœud de trèfle au nœud de huit, il faut changer au moins deux croisements. Curieusement, les signatures qui sont les invariants tout désignés pour résoudre ce genre de problèmes ne sont pas efficaces directement! La preuve est néanmoins très élémentaire.

Remarque 2. *Après avoir rédigé ce texte, j'ai trouvé une preuve du même fait dans l'article [1]. La preuve de H. Murakami est exprimée avec plus de généralité et dans un langage différent mais repose sur le même principe. La version proposée dans ce texte est toutefois plus simple et plus rapide quoique moins géométrique, il me semble qu'elle reste donc intéressante.*

1 Le graphe gordien

On visualise les suites de changements de croisements comme un chemin dans le graphe gordien des nœuds. Ce graphe est obtenu en considérant l'ensemble des nœuds munis d'arêtes reliant toute paire de nœuds différant d'un seul croisement. La réponse négative à la question prouve que la distance entre le nœud de trèfle et le nœud de huit est égale à 2 (on peut accessoirement se demander si tout chemin de longueur 2 joignant ces deux nœuds passe nécessairement par le nœud trivial).

Dans la suite, on essaie simplement de décrire de la façon la plus directe possible la restriction de ce graphe aux nœuds ayant moins de 5 croisements. Déjà pour une si petite famille de nœuds, on exhibe deux éléments dont on ne sait pas mesurer la distance.

Pour tout nœud K, on note $\overline{K}$ l'image miroir de K, c'est-à-dire $r(K)$ où r est une réflexion par rapport à un plan.

On considère la famille des nœuds à moins de 5 croisements. Il reste donc les nœuds de la figure 2.

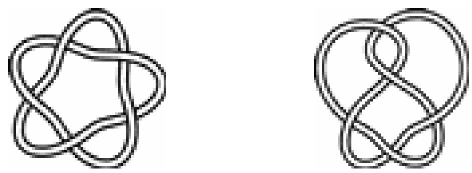
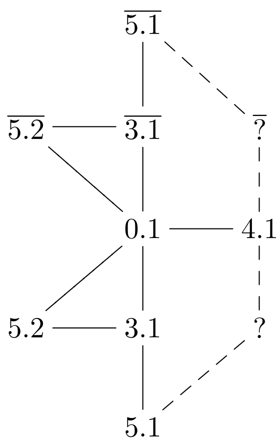


Figure 2: Le nœud torique 5.1 et le nœud 5.2

Les nœuds qui nous intéressent sont précisément les nœuds de la famille suivante $\mathcal{L} = \{0.1, 3.1, \overline{3.1}, 4.1, 5.2, \overline{5.2}, 5.1, \overline{5.1}\}$.

Proposition 3. *La restriction du graphe gordien à la famille $\mathcal{L}$ est la suivante:*



Cela signifie que la distance gordienne entre deux éléments de $\mathcal{L}$ est la distance induite par le graphe, sauf pour la distance entre les nœuds 4.1 *et* 5.1 *(ou leurs images miroir) où elle est éventuellement égale à deux.*

Démonstration. Il est très facile de prouver que la distance entre deux nœuds est plus petite que la distance sur le graphe car les arêtes du graphe correspondent aux changements de croisement évidents. La partie difficile est de minorer les distances gordiennes. Pour cela, l'outil tout indiqué est la signature équivariante. Pour chaque nœud K, on peut construire une fonction $\sigma_K : S^1 \to \mathbb{Z}$ constante par morceaux, nulle en 1 et ne changeant de valeurs qu'aux racines du polynôme d'Alexander Δ_K. Cette fonction vérifie pour tout $z \in S^1$ et pour tous nœuds K et L

$$|\sigma_K(z) - \sigma_L(z)| \leq 2d(K, L). \tag{1}$$

Dans cette formule, $d(K, L)$ désigne la distance gordienne entre K et L, c'est-à-dire le nombre minimal de croisements nécessaires pour passer de K à L. La signature vérifie les relations suivantes pour tout nœud K et tout z dans S^1: $\sigma_K(\overline{z}) = \sigma_K(z)$ et $\sigma_{\overline{K}}(z) = -\sigma_K(z)$.

Dans la figure 3, on donne les valeurs de la signature des nœuds $3.1, 5.1$, et 5.2. La signature de 4.1 est nulle car $4.1 = \overline{4.1}$. Les lignes pointillées correspondent aux zéros des polynômes d'Alexander de $3.1, 5.1$ et 5.2 qui sont respectivement $\Delta_{3.1} = t^{-1} - 1 + t$, $\Delta_{5.1} = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$, et $\Delta_{5.2} = 2t^{-1} - 3 + 2t$. Pour information, on a aussi $\Delta_{4.1} = -t^{-1} + 3 - t$.

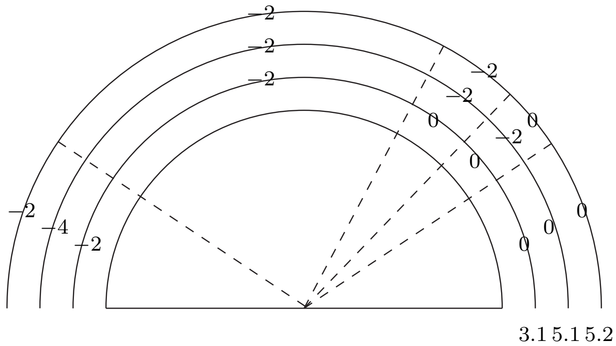


Figure 3: Signatures des nœuds 3.1, 5.1 et 5.2

Utilisant la donnée des signatures et la minoration de l'équation (1), on détermine toutes les distances gordiennes représentées sur le graphe de la proposition 3 sauf les distances suivantes:

$$d(3.1, 4.1),\ d(5.1, 5.2),\ d(4.1, 5.2) \text{ et } d(4.1, 5.1)$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par l'isométrie $K \mapsto \overline{K}$. On propose ci-dessous une méthode pour déterminer les trois premières distances (je ne sais pas déterminer la dernière).

2 Distance entre 3.1 et 4.1

Supposons par l'absurde que les nœuds 3.1 et 4.1 sont à distance 1. Cela signifie qu'en changeant un croisement au nœud 3.1, on obtient le nœud 4.1. On va utiliser les présentations chirurgicales des nœuds et la définition du polynôme d'Alexander comme déterminant de la matrice d'enlacement équivariant des composantes de chirurgie. On réfère à [2] pour les définitions de base.

En terme de chirurgie, il existe une composante L_1 dans le complémentaire du nœud 3.1 non nouée, n'enlaçant pas le nœud et d'auto-enlacement ± 1, dont la chirurgie donne le nœud 4.1. De plus, le nœud 3.1 est lui-même obtenu par chirurgie sur une courbe non nouée L_2 et n'enlaçant pas un nœud trivial. Les courbes L_1 et L_2 vérifient alors les propriétés suivantes.

Les courbes L_1 et L_2 sont plongées dans le complémentaire d'un nœud trivial et n'enlacent pas ce dernier. La chirurgie sur L_2 crée le nœud 3.1 et la chirurgie sur $L_1 \cup L_2$ crée le nœud 4.1. La matrice d'enlacement équivariante des courbes L_1 et L_2 a pour expression

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix}$$

Avec $A, B, C \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, $P \mapsto \overline{P}$ l'involution de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ qui envoie t sur t^{-1} et les équations $\overline{A} = A, \overline{C} = C$. Comme le déterminant de la matrice d'enlacement équivariant est égal au polynôme d'Alexander au signe près, on a

$$C = \pm\Delta_{3.1},\ AC - B\overline{B} = \pm\Delta_{4.1}.$$

Il suffit de prouver que ces équations n'ont pas de solution. Quitte à remplacer simultanément C par $-C$ et A par $-A$, on peut supposer que l'on a $C = \Delta_{3.1}$. L'équation devient

$$A\Delta_{3.1} - B\overline{B} = \varepsilon\Delta_{4.1} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1 \tag{2}$$

En évaluant cette équation en -1, on trouve $-3A(-1) - B(-1)^2 = 5\varepsilon$. Ceci implique que -5ε est un carré modulo 3, ou de manière équivalente ε est un carré modulo 3. Ceci impose l'égalité $\varepsilon = 1$. Finalement, soit ξ la racine de $\Delta_{3.1}$ de partie imaginaire positive: elle est de module 1. Évaluant l'équation (2) en ξ on obtient $-|B(\xi)|^2 = \Delta_{4.1}(\xi)$. Or la fonction $\Delta_{4.1}$ est à valeurs strictement positives sur le cercle unité. On obtient bien là une contradiction.

On vérifie de la même façon que l'équation $A\Delta_{5.2} - B\overline{B} = \varepsilon\Delta_{4.1}$ n'a pas de solution et on prouve que l'équation $A\Delta_{5.2} - B\overline{B} = \varepsilon\Delta_{5.1}$ n'a pas de solution non plus en considérant uniquement l'évaluation en -1. Ceci prouve que les distances $d(3.1, 4.1), d(5.1, 5.2)$ et $d(4.1, 5.2)$ sont précisément égales à 2. □

Question 4. *Quelle est la distance entre 4.1 et 5.1: 2 ou 3?*

References

[1] H. Murakami – "Some metrics on classical knots", *Math. Ann.* 270 (1985), no. 1, p. 35-45.

[2] D. Rolfsen – *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.