LM223 Formes quadratiques et géométrie, Feuille 2

1 Changement de base

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui a pour matrice A dans la base canonique. Trouver une base dans laquelle f admet pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice de passage.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Soient
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Écrire les coordonnées dans $\mathcal{C}$ d'un vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 14 & -21 \\ -1 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$
Quel est le noyau de u ? Quel est son rang ? L'endomorphisme u est-il inversible ?
4. Calculer $u(f_1), u(f_2), u(f_3)$ et écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.

2 Opérations élémentaires

Exercice 3. À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, déterminer le rang des matrices suivantes, à coefficients dans $\mathbf{R}$, et donner leur inverse éventuel.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1/2 & -1/3 \\ 2 & 4 & -6 & 1 & -2/3 \\ -3 & -6 & 9 & -3/2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1/2 & 1/3 \\ 5 & 12 & -18 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $t \in \mathbf{R}$, on considère la matrice A_t ci-dessous ; à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, déterminer le rang de A_t et, quand c'est possible, son inverse :

$$A_t = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que la matrice L_x ci-dessous soit inversible :

$$L_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

3 Déterminants et valeurs propres

Exercice 6 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soit n un entier ≥ 1. Pour toute famille de réels $a_1, \dots, a_n$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(*) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.
5. Autre méthode pour $(*)$. Soit X une indéterminée, vérifier que $V(X, a_2, \ldots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $n-1$. Calculer son coefficient dominant et remarquer ses racines évidentes, retrouver ainsi la formule $(*)$.

Exercice 7. Calculer les déterminants des matrices de l'exercice 3, et des matrices ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 11 & 13 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. 1) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -\mathbf{I}_n$. Montrer que n est pair.

2) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in M_n(\mathbf{Q})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. On considère la matrice M suivante, dans $M_n(\mathbf{C})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On fixe $n = 4$ (mais on peut faire l'exercice pour n arbitraire).

1) Écrire la matrice $M - X\mathbf{I}_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, montrer que le polynôme caractéristique de M est

$$(-1)^n(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i).$$

2) Pour toute valeur propre λ de M, déterminer le sous-espace propre associé V_λ (on montrera que V_λ est de dimension 1).

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

4) Soient $n = 4$, $a_0 = 0$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$; est-ce que M est diagonalisable ?

Exercice 10. Soient $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $M_a \in M_n(\mathbf{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont a, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls, et soit $P_a(X)$ le polynôme caractéristique de M_a :

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $-a$ est valeur propre de M_a : plus précisément, montrer que l'espace propre $V_{-a} = \mathrm{Ker}(M_a + a\mathbf{I}_n)$ est de dimension $n-1$.

2) En utilisant la trace, trouver la dernière valeur propre de M_a. En déduire que M_a est diagonalisable et déterminer $P_a(X)$ et $\mathrm{dét}(M_a) = P_a(0)$.

4 Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation

Exercice 11. 1) On considère les matrices suivantes, à coefficients dans $\mathbf{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dîtes lesquelles sont diagonalisables, et trouvez pour celles-ci une base de vecteurs propres. Expliquez pourquoi les autres ne sont pas diagonalisables.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable sur $\mathbf{C}$?

Exercice 12. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation choisie.

Exercice 13. Soit $A \in M_4(\mathbf{C})$. On suppose que les valeurs propres de A sont $1, -1, i$ et $-i$. Montrer que A est diagonalisable et inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 14. Soit $A \in M_n(\mathbf{Q})$ vérifiant $A^2 - 5A + 6\mathbf{I}_n = 0$. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

Exercice 15. On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{ij} = ij$ pour tout i, j. On fixe $n = 4$ (mais on peut faire l'exercice pour n arbitraire).

1. Montrer que A est de rang 1, puis déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$. En déduire que A est diagonalisable.