7 Applications différentiables

Exercice 7.1 (*Quelques révisions*).

a) Rappeler la définition des dérivées partielles. Calculer les dérivées partielles des applications

$$(x, y, z) \to x^4 + y^4 + z^4, \qquad (x, y, z) \to 4x^2yz$$

b) Rappeler la définition de la jacobienne. Calculer la jacobienne de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4, 4x^2yz).$$

Même exercice avec l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x, y, z) = (x^3 + z^3, y^3 - 3xyz, x - 2y + z).$$

c) Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons $g : I \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Rappeler comment on calcule les dérivées partielles de $f \circ g$ en fonctions des dérivées partielles de f et de la dérivée de g.

d) Soient des applications x, y f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivéees partielles de

$$(t, s) \to f(x(t, s), y(t, s)) \quad \text{ et } \quad (t, s) \to g(s^2 + t^3, x^2(t, s))$$

en fonction de celles de f, g, x et y.

e) Avec les mêmes notations qu'au *d)*, comparer les jacobiennes des applications

$$(t, s) \to (x(t, s), y(t, s)), \qquad (x, y) \to (f(x, y), g(x, y))$$

et

$$(t, s) \to (f(x(t, s), y(t, s)), g(x(t, s), y(t, s)))$$

Exercice 7.2 (*Dérivée directionnelle*). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $x \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f est *dérivable suivant* $\overrightarrow{u}$ *en* x si

$$h(t) = f(x + t\overrightarrow{u})$$

est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas, on appelle $h'(0)$ la *dérivée directionnelle* de f en x par rapport à $\overrightarrow{u}$.

a) Quelle relation existe-t-il entre dérivées partielle et dérivée directionnelle ?

b) Vérifier que si f est différentiable en x, elle admet des dérivées directionnelles en x dans toutes les directions. Les calculer en fonction de $Df(x)$.

c) Déduire de ce qui précéde la relation entre matrice jacobienne et différentielle.

d) Vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas différentiable.

e) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y^3/x \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0,y) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Exercice 7.3 (*Tangente d'une courbe définie implicitement*)**.** Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable et C la courbe d'équation $f(x,y) = 0$. Soit $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un point de C en lequel la différentielle de f ne s'annule pas. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ un *vecteur de direction limite* en A, c'est à dire tel que pour une suite de point (M_k) de C qui converge vers A et une suite de réels (λ_k), l'on a

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = \mathbf{v}.$$

Montrer alors que $Df(A)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

On appelle *tangente* en A la droite des points P tels que

$$Df(A)(\overrightarrow{AP}) = 0.$$

Donner son équation en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 7.4 (*Tangente d'une courbe paramétrée*)**.** Soit une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle ouvert et de classe C^1. Soit $\mathbf{v}$ un *vecteur de direction limite* en $A = \gamma(t)$, c'est à dire que pour une suite (h_k) de réels tendant vers 0 et une suite de réels (λ_k), l'on a

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = \mathbf{v}$$

avec $M_k = \gamma(t+h_k)$. Supposons que $\gamma'(t) \neq 0$. Montrer alors que $\mathbf{v}$ est colinéaire à $\gamma'(t)$.

On appelle tangente en A la droite de direction $\gamma'(t)$ passant par A. Relier cette définition à celle de l'exercice précédent (considérer la fonction $t \to f(\gamma(t))$).

Soit une droite D de $\mathbb{R}^n$ passant par A de vecteur directeur v unitaire. Montrer que la distance $d(h)$ de $\gamma(t+h)$ à D vérifie

$$d^2(h) = h^2(\|\gamma'(t)\|^2 - (\gamma'(t), \overrightarrow{v})^2) + o(h^2).$$

En déduire que $d(h) = o(h)$ ssi $\gamma'(t)$ et v sont colinéaires.

Exercice 7.5 (*Différentiabilité des normes*)**.** Soit $\| \cdot \|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

n'est pas différentiable en 0 et que l'ensemble de ses points de différentiabilité est une réunion de demi-droites de $\mathbb{R}^n$.

En quels points sont différentiables les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7.6 (*Relation d'Euler*)**.** Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré n, i.e. pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^p$ l'on a $f(tx) = t^n f(x)$. On suppose que f est différentiable en dehors de l'origine. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$Df(x)(x) = nf(x)$$

et que $Df(tx) = t^{n-1} Df(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7.7 (*Taylor-Young avec reste intégral*)**.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) g_i(x, y),$$

où $g_i(x, y) = \int_0^1 \partial_{x^i} f(y + s(x-y)) \, ds$. En déduire l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 7.8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit la fonction $g : I^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer g lorsque f est un polynôme de degré 2.

b) On suppose désormais que f est de classe C^1. Montrer que

$$g(x,y) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))dt.$$

c) En déduire que g est continue sur I^2.

d) On suppose de plus que f est deux fois dérivable en $a \in I$. Montrer alors que g est différentiable en (a,a).

Exercice 7.9 (*Un classique)***.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée partielle par rapport à y existe en tout point et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction

$$(x,y) \to \int_0^x f(t,y)\, dt$$

est de classe C^1. En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(y) = \int_0^y f(t,y)\, dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 7.10 (*Dimension infinie, exemples simples)***.**

a) Etudier la dérivabilité de la norme d'un espace de Hilbert.

b) Montrer que l'application de $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme dans $\mathbb{R}$

$$f \to \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

est différentiable. Calculer sa différentielle.

Exercice 7.11 (*Opérateur de composition)***.** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que l'application de $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$C : X \to X, \quad f \to \varphi \circ f$$

est continue.

b) On suppose désormais φ de classe C^1. Montrer que $\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + h\Psi(x,h)$ avec Ψ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que C est différentiable avec pour différentielle

$$DC(f)(h) = \varphi'(f).h$$

Exercice 7.12 (*Longueur d'un arc*)**.** Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré de classe C^1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. A toute subdivision σ de $[a,b]$ par des points $t_0 = 1 < t_1 < \ldots < t_n = b$ on associe la longueur de la ligne brisée

$$L_\sigma = \sum_{j=0}^{n} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

et on appelle longueur de γ la borne supérieure des L_σ où σ parcours toutes les subdivisions de $[a,b]$. On se propose de montrer que la longueur L de γ est égale à

$$I = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du.$$

a) Montrer que tout arc de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de de droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait pour tous $s, t \in [a,b]$ vérifiant $|s-t| \leqslant \alpha$

$$\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leqslant \epsilon \qquad \text{et}$$
$$\|\gamma(s) - \gamma(t) - (s-t)\gamma'(t)\| \leqslant \epsilon|s-t|.$$

c) Avec ϵ et α comme dans la question précédente, montrer que pour toute subdivision σ dont le pas est inférieur à α, l'on a

$$|L_\sigma - I| \leqslant 2\epsilon(b-a)$$

d) Conclure.

Exercice 7.13. Soit c_0 l'espace des suites réelles convergeant vers 0 muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

a) Montrer que pour tout $u \in c_0$ la borne supérieure des $|u_n|$ quand n décrit $\mathbb{N}$ est atteinte.

b) Soit $u \in c_0$ tel que $\|u\|_\infty$ soit atteinte au rang N et pour tout $n \neq N$, $|u_n| \neq \|u\|_\infty$. Montrer alors que

$$M = \sup_{n \neq N} |u_n| < \|u\|_\infty$$

Montrer ensuite que pour tout $h \in c_0$,

$$\|h\| \leqslant \tfrac{1}{2}(\|u\|_\infty - M) \Rightarrow \|u+h\|_\infty = \|u\| + \operatorname{sgn}(u_N)h_N$$

En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable en u.

c) Soit $u \in c_0$ non-nul et tel que $\|u\|_\infty = |u_N| = |u_P|$. Soit la suite h dont tous les termes sont nuls excepté le N-ième qui vaut 1. Montrer alors que pour $|t| < \|u\|$,

$$\|u + th\|_\infty = \begin{cases} \|u\|_\infty + t & \text{si } tu_N \geqslant 0 \\ \|u\|_\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire que $\| \cdot \|_\infty$ n'est pas différentiable en u.

Exercice 7.14 (*Inversion dans* $\mathrm{Gl}(n)$**).** On note $\mathrm{M}(n)$ l'espace vectoriel formé des matrices de taille $n \times n$ et $\mathrm{Gl}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ le groupe linéaire.

a) Montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est ouvert dans $\mathrm{M}(n)$.

b) Montrer que l'application Ψ de $\mathrm{Gl}(n)$ dans lui même qui associe à une matrice son inverse est de classe C^1.

c) Calculer la différentielle de Ψ en dérivant $t \to \Psi(M + tH).(M + tH)$ en $t = 0$.

d) Calculer la différentielle de Ψ en l'identité en calculant explicitement l'inverse de $\mathrm{Id} + tC_{ij}$, où C_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.

e) Déduire $D\Psi(M)$ de $D\Psi(\mathrm{Id})$.

Exercice 7.15 (*Fonction déterminant)***.** On note φ l'application déterminant de $\mathrm{M}(n)$ dans $\mathbb{R}$.

a) Pourquoi φ est-elle de classe C^1 ?

b) En calculant $\varphi(\mathrm{Id} + tC_{ij})$, montrer que $D\varphi(\mathrm{Id})(H) = \mathrm{tr}(H)$

c) En déduire que pour tout $M \in \mathrm{Gl}(n)$, $D\varphi(M)(H) = \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}H)$.

d) Montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est dense dans $\mathrm{M}(n)$ (pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, montrer qu'il existe H telle que $M + tH$ soit inversible lorsque $t \neq 0$).

e) En prolongeant par continuité, montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, $D\varphi(M)(H) = \mathrm{tr}(C^t H)$ où C est la matrice des cofacteurs de A.

Exercice 7.16 (*Formule de Taylor-Young au second ordre)***.** Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j g_{ij}(x),$$

où $g_{ij}(x)$ est l'intégrale

$$g_{ij}(x) = \int_0^1 (s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(sx)\, ds.$$

Exercice 7.17 (*Isométries*)**.** Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrons que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est une *isométrie*, *i.e.* pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|$.
2. f est une *isométrie infinitésimale*, *i.e.* pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, l'on a $\|Df(x)(h)\| = \|h\|$.
3. f est une isométrie affine.

On établira que 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1. Pour l'implication 2. $\Rightarrow$ 3., on déduira de 2. que les fonctions

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

vérifient $a_{ijk} = a_{ikj}$ et $a_{ijk} = -a_{kji}$ et que par conséquent elles s'annulent.

Soit $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ le laplacien de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f \tag{1}$$

pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 si et seulement si f est une isométrie. On pourra montrer dans un premier temps que (1) équivaut à

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{jk} \quad \text{et} \quad \Delta f_j = 0$$

pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$.