# 1 Enoncés

Dans tous les exercices, on considère que $\mathbb{R}^n$ est munie d'une norme. Le choix de cette norme n'a pas d'importance car nous somme en dimension finie.

**Exercice 1.1.** Soit $P$ le demi-plan ouvert $\{(u, v)/\ u > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi$ de $P$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v).$$

Montrer que $\varphi$ est un difféomorphisme de $P$ sur un ouvert $Q$ que l'on précisera.

**Exercice 1.2.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (e^{-2y} + e^{-2z}, e^{2x} - e^{2y}, x - y)$$

est un difféomorphisme local sur l'ouvert $U$ des points de coordonnées $(x, y, z)$ vérifiant $x \neq y$. Montrer que $f$ est injective sur $U$ et que $f(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 1.3.** Montrer que

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$$

est au voisinage de $(0, 1)$ le graphe d'une fonction $x \to \phi(x)$ de classe $C^2$ telle que $\phi(0) = 1$. Donner un développement limité de $\phi$ à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 1.4.** Montrer que pour tout réel $t$ tel que $|t| < 1/\sqrt{2}$, l'équation

$$\sin(tx) + \cos(tx) = x$$

admet une unique solution $x = \phi(t)$. Vérifier que $\phi$ est de classe $C^2$. Donner un développement limité de $\phi$ à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 1.5.** Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable telle que

$$\|Dg(x)\| \leqslant k$$

en tout $x$ de $\mathbb{R}^n$ pour $k < 1$ et indépendant de $x$. Soit $f(x) = x + g(x)$.

*a)* Montrer que $g$ est contractante. En déduire que $f$ est injective.

*b)* Montrer que $\|f(x)\| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, autrement dit que l'image réciproque par $f$ de tout ensemble borné est borné.

*c)* Montrer que $f$ est surjective.

*d)* Montrer que $f$ est un difféomorphisme.

**Exercice 1.6.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel

$$\alpha\|x-y\| \leqslant \|f(x)-f(y)\|, \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

*a)* Montrer que $f$ est injective.
*b)* Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
*c)* Montrer que $Df(x)$ est inversible en tout point $x$ de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $f$ est surjective.
*d)* Montrer que $f$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 1.7.** Soit $\mathrm{M}(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$. $\mathrm{M}(n)$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc on peut le munir d'une norme.
*a)* Montrer que l'ensemble $\mathrm{Gl}(n)$ des matrices carrées d'ordre $n$ est un ouvert de $\mathrm{M}(n)$.
*b)* Montrer que l'application déterminant $\mathrm{M}(n) \to \mathbb{R}$, $A \to \det A$ est de classe $C^1$ et calculer sa différentielle en l'identité, puis en toute matrice inversible.
*c)* Montrer que l'application inverse $\mathrm{Gl}(n) \to \mathrm{Gl}(n)$, $A \to A^{-1}$ est un difféomorphisme de classe $C^1$. Calculer sa différentielle.

## 2 Corrections

**Corrigé 2.1.** La fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $P$, car chacune de ses composantes l'est. Si $(u,v) \in P$, on a $u > 0$ et $x = u\cosh v > u|\sinh v| = |y|$. Donc $\varphi(P) \subset Q$, où

$$Q =_{\text{def}} \{(x,y) \in P : x > |y|\}.$$

Montrons que $\varphi$ est injective. Si $\varphi(u,v) = (x,y)$, alors

$$x^2 - y^2 = u^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v) = u^2$$

$u$ étant positif il vient

$$u = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Ainsi $u$ est uniquement déterminé par $(x,y)$. Il en est de même pour $v$ car

$$\sinh v = y(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

et $v \to \sinh v$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, si $(x,y) \in Q$, on peut définir $(u,v)$ par les équations (1) et (2) et l'on a alors $\varphi(u,v) = (x,y)$.

Autrement dit, $\varphi$ est une bijection de $P$ sur $Q$. On voit aussi à partir de ces équations que la réciproque $\Psi$ de $\varphi$ est de classe $C^1$ (rappelons que l'inverse de $v \to \sinh v$ est une fonction de classe $C^1$). Donc $\varphi$ est un difféomorphisme. On aurait pu aussi appliquer le théorème d'inversion locale : la matrice jacobienne de $\varphi$ est

$$\begin{pmatrix} \cosh v & u \sinh v \\ \sinh v & u \cosh v \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $u > 0$ sur $P$. Le lecteur est invité à calculer la matrice jacobienne de $\psi$ et son jacobien.

**Corrigé 2.2.** $f$ est de classe $C^1$. Sa matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} 0 & -2e^{-2y} & -2e^{-2z} \\ 2e^{2x} & -2e^{2y} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $4e^{-2z}(e^{2x} - e^{2y})$. Il s'annule si et seulement si $x = y$. Donc $f$ est localement un difféomorphisme de classe $C^1$ sur l'ouvert

$$U = \{(x, y, z)/ \; x - y \neq 0\}.$$

Vérifions que $f$ est injective. Il suffit de montrer que le système

$$f(x, y, z) = (X, Y, Z)$$

a au plus une solution dans $U$. Ce système donne $x = Z + y$. Donc nécessairement $Z \neq 0$, et en reportant dans la deuxième équation $e^{2y}(e^{2Z} - 1) = Y$, qui a au plus une solution en $y$. On obtient alors $x$ (au plus une valeur) et enfin $z$ (toujours au plus une valeur) grâce à la première équation.

$f$ étant un difféomorphisme local, $f(U)$ est ouvert. $f$ étand de plus une bijection elle induit un difféomorphisme de $U$ sur $f(U)$.

**Corrigé 2.3.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$. Cette fonction est de classe $C^1$. De plus $f(0, 1) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 \neq 0$$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $U$ de $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $V$ de $0$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\phi$ de classe $C^1$ telle que pour tout $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } y = \phi(x)$$

Autrement dit, $\Gamma \cap U$ est le graphe de $\phi$. $\phi$ est de classe $C^\infty$ car $f$ l'est aussi.

D'après la formule Taylor-Young,

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + \frac{1}{2}x^2\phi''(0) + \frac{1}{6}x^3\phi'''(0) + o(x^3)$$

On a $f(x, \phi(x)) = 0$, autremenent dit

$$x^3 + \phi(x)^3 - 3x\phi(x) - 1 = 0$$

En dérivant cette égalité, il vient

$$3x^2 + 3\phi'(x)\phi(x)^2 - 3\phi(x) - 3x\phi'(x) = 0.$$

On évalue ceci en $x = 0$, on obtient alors $\phi'(0) = 1$. En dérivant à nouveau, on trouve $\phi''(0) = 0$ et $\phi'''(0) = 12$.

**Corrigé 2.4.** Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < 1/\sqrt{2}$. Montrons que la fonction

$$f_t(x) = x - \sin xt - \cos xt$$

s'annule en un seul point. Elle est de classe $C^\infty$ et

$$\begin{aligned} f_t'(x) =& 1 - t(\cos tx - \sin tx) \\ \geqslant& 1 - |t|\sqrt{2} > 0 \end{aligned}$$

De plus, $f_t(x)$ tend vers $\infty$ (resp. $-\infty$) quand $x$ tend vers $\infty$ (resp.$-\infty$). Il découle alors du théorème des valeurs intermédiaires que $f_t$ admet un unique 0. (On pouvait aussi appliquer le théorème du point fixe à la fonction $x \to \sin tx + \cos tx$).

Donc pour $|t| < 1/\sqrt{2}$, nous avons montré l'existence et l'unicité d'une solution $x = \phi(t)$. Pour montrer que $\phi$ est de classe $C^1$ sur $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, on montre qu'elle l'est au voisinage de tout point $t_0 \in ]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$. Ceci découle du théorème des fonctions implicites. En effet, si $x_0 = \phi(t_0)$, la fonction

$$f(t, x) = x - \sin(tx) - \cos(tx)$$

s'annule en $(t_0, x_0)$. Sa dérivée partielle par rapport à $x$ est $f_t'(x)$ qui est différent de 0 en $(t_0, x_0)$. Donc il existe une fonction $\tilde{\phi}$ défini au voisinage de $t_0$, de classe $C^1$ telle que $f(t, \tilde{\phi}(t)) = 0$. D'après la première partie $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$.

Comme on l'a déjà remarqué dans l'exercice précédent, $f$ étant de classe $C^\infty$, il en est de même pour $\phi$. Il existe alors des réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$\phi(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + o(t^3)$$

Comme $t\phi(t) \to 0$ quand $t \to 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\sin t\phi(t) + \cos t\phi(t) =& t\phi(t) - \tfrac{1}{6}t^3\phi(t)^3 + 1 - \tfrac{1}{2}t^2\phi(t)^2 + o(t^3) \\ =& 1 + at + (-\tfrac{1}{2}a + b)t^2 + (\tfrac{1}{6}a^3 + c - ba)t^3 + o(t^3)\end{aligned}$$

Par conséquent, $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{2}{3}$.

**Corrigé 2.5.** *a)* D'après le théorème des accroissements finis, $\|Dg(x)\| \leqslant k$ pour tout point $x$ de $\mathbb{R}^n$ implique

$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant k\|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme $k < 1$, $g$ est contractante. Montrons que $f$ est injective. Si $f(x) = f(y)$, alors $x - y = g(y) - g(x)$. Compte tenu de l'inégalité précédente, il vient

$$\|x - y\| \leqslant k\|x - y\|$$

Or $k < 1$, donc nécessairement $x = y$.

*b)* On dit que $\|f(x)\|$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini si

$$\forall M > 0,\ \exists N > 0 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geqslant N \Rightarrow \|f(x)\| \geqslant M$$

Ceci équivaut à : pour tout $M > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| < M \Rightarrow \|x\| < N$$

Autrement dit l'image réciproque de la boule de rayon $M$ est incluse dans la boule de rayon $N$. Il est facile de voir que ceci équivaut au fait que l'image de tout ensemble borné est borné.

Ceci étant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x - g(x)\| \geqslant \|x\| - \|g(x) - g(0)\| - \|g(0)\|$$

$g$ étant $k$-lipschitzienne, il vient

$$\|f(x)\| \geqslant (1 - k)\|x\| - \|g(0)\|.$$

Donc si $M > 0$, il suffit de poser $N = (M + \|g(0)\|)(1 - k)^{-1}$. De sorte que $\|x\| \geqslant N$ implique

$$(1 - k)\|x\| - \|g(0)\| \geqslant M,$$

et donc $\|f(x)\| \geqslant M$.

*c)* Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On cherche $x$ tel que $f(x) = y$, autrement dit $x$ doit être un point fixe de $x \to y - g(x)$. Cette application est contractante car $g$ l'est. Le résultat découle alors du théorème du point fixe.

*d)* Il découle des questions précédentes que $f$ est une bijection. Montrons que $f$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. $f$ est différentiable car $g$ l'est, de plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x)(u) = u + Dg(x)(u)$$

$\|Dg(x)\| \leqslant k$ implique $\|Dg(x)(u)\| \leqslant k\|u\|$ et donc $\|Df(x)(u)\| \geqslant (1-k)\|u\|$. De cela on déduit immédiatement que $Df(x)$ est injective, donc bijective d'après le théorème du rang. Il découle alors du théorème d'inversion locale que $f$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

**Corrigé 2.6.** *a)* Il est immédiat que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, autrement dit $f$ est injective.

*b)* On utilise la caractérisation des fermés par les suites. Soit $(z_m)$ une suite convergente de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $f(\mathbb{R}^n)$. Montrons que sa limite $z$ appartient à $f(\mathbb{R}^n)$. $z_m$ est de la forme $f(x_m)$. Par hypothèse,

$$\alpha\|x_m - x_p\| \leqslant \|z_m - z_p\|$$

$(z_m)$ est convergente, donc vérifie le critère de Cauchy. D'après l'inégalité ci-dessus, il en est de même pour $(x_m)$, qui est donc convergente. Soit $x$ sa limite, $f$ étant continue, $f(x) = z$.

*c)* Soit $x$ et $u$ dans $\mathbb{R}^n$ fixés. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|t|\alpha\|u\| \leqslant \|f(x+tu) - f(x)\|$$

D'autre part, $f$ étant différentiable,

$$f(x+tu) = f(x) + tDf(x)(u) + to(1),$$

$o(1)$ désigant une fonction qui tend vers 0 lorsque $t \to 0$. On déduit alors de l'inégalité précédente que

$$|t|\alpha\|u\| \leqslant |t|(\|Df(x)(u)\| + o(1))$$

On simplifie alors par $|t|$ (lorsque $t \neq 0$ !), et on passe à la limite $t \to 0$, il vient

$$\alpha\|u\| \leqslant \|Df(x)(u)\|$$

De cette inégalité on déduit que $Df(x)$ est injective, donc inversible d'après le théorème du rang. D'après le théorème d'inversion locale, $f$ est alors ouverte. Par conséquent $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. Ainsi $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie non vide à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{R}^n$ qui est connexe, donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, autrement dit $f$ est surjective.

*d)* On a déjà montré que $f$ était bijective et que sa différentielle était inversible en tout point, $f$ est donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

**Corrigé 2.7.** *a)* On peut identifier les espaces vectoriels $\mathbb{R}^N$ et $\mathrm{M}(n)$ en associant à tout point $x \in \mathbb{R}^N$ la matrice dont les coefficients sont les coordonnées de $x$. L'application déterminant

$$\det : \mathrm{M}(n) \to \mathbb{R}$$

est un polynôme en les coefficients de la matrice, elle est donc continue. $\mathrm{Gl}(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ est alors ouvert, comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

*b)* L'application $f : A \to \det(A)$ étant un polynôme en les coefficients de la matrice, elle est de classe $C^1$. Pour tout $M$ et $U \in \mathrm{M}(n)$, on a

$$\det(M + tU) = \det M + tDf(M)(U) + o(t)$$

Calculons $Df(M)(U)$ à l'aide de cette formule. En développant le déterminant, on voit que $\det(\mathrm{Id} + tU)$ est un polynôme en $t$ dont on calcule facilement les deux premiers coefficients :

$$\det(\mathrm{Id} + tU) = 1 + t\,\mathrm{tr}(U) + O(t^2)$$

Par conséquent $Df(\mathrm{Id})(U) = \mathrm{tr}(U)$. Si $M$ est inversible, alors

$$M + tU = M(\mathrm{Id} + tM^{-1}U)$$

donc

$$\begin{aligned}
\det(M + tU) &= \det M. \det(\mathrm{Id} + tM^{-1}U) \\
&= \det M.(1 + \mathrm{tr}(M^{-1}U) + O(t^2)) \\
&= \det M + t\det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}U) + O(t^2)
\end{aligned}$$

Il vient $Df(M)(U) = \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}U)$.

*c)* C'est un résultat du cours d'algèbre linéaire que

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} C(A) \tag{3}$$

où $C(A)$ est la matrice des cofacteurs. Cette matrice n'est pas simple à calculer, mais on voit facilement que ses coefficients sont des polynômes en les coefficients de $A$. Donc l'application $A \to C(A)$ est de classe $C^1$. L'application déterminant est aussi de classe $C^1$, on en déduit que $A \to A^{-1}$ est de classe $C^1$.

Voici une autre preuve qui ne suppose pas de connaitre la formule (3) et qui permet de plus de calculer la différentielle : $A^{-1}$ est l'unique matrice telle que $A.A^{-1} = \mathrm{Id}$, autrement dit l'application $g(A) = A^{-1}$ est définie implicitement par $h(A, g(A)) = 0$, où $h$ est l'application

$$h : \mathrm{M}(n) \times \mathrm{M}(n) \to \mathrm{M}(n), \quad h(A, B) = AB - \mathrm{Id}$$

$h$ est la somme d'une application bilinéaire et d'une constante, elle est donc de classe $C^1$ et sa différentielle est

$$Dh(A, B)(U, V) = AV + UB$$

Soit $A$ une matrice inversible. La différentielle partielle de $h$ par rapport au deuxième facteur en $(A, A^{-1})$ est

$$\mathrm{M}(n) \to \mathrm{M}(n), \quad V \to AV$$

Cette application est inversible, en effet son inverse est $V \to A^{-1}V$. Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $g_1$ de classe $C^1$ définie sur un voisinage de $A$ à valeur dans $\mathrm{M}(n)$ telle que $h(M, g_1(M)) = 0$. Or nécessairement $g(M) = g_1(M)$. Donc $g$ est différentiable sur un voisinage de $A$. Ceci étant vrai pour tout $A$, $g$ est différentiable sur $\mathrm{Gl}(n)$. De plus,

$$Dg(A)(U) = -A^{-1}UA^{-1}.$$