Théorie de Hodge pour les variétés compactes

Soit M^m une variété orientée compacte, $\mu \in \Omega^m(M)$ un élément de volume et $F \to M$ un fibré vectoriel réel muni d'une métrique $h \in C^\infty(M, F^* \otimes F^*)$.
Alors l'espace $C^\infty(M,F)$ a un produit scalaire réel :

$$\langle s,t \rangle = \int_M h(s,t)\, \mu .$$

On a bien que $\forall s \in C^\infty(M,F)$, $\|s\|^2 = \langle s,s\rangle \geqslant 0$ et $\langle s,s \rangle = 0 \Rightarrow s = 0$
Par contre, la distance $\|s-t\|$ de $C^\infty(M,F)$ n'est pas complète.

Si M n'est pas compacte, $\langle s,t\rangle$ est bien défini lorsque $\operatorname{Supp} s \cap \operatorname{Supp} t$ est compact. Ce produit est non dégénéré en ce sens que pour tout $s \in C^\infty(M,F)$

$$(\forall t \in C^\infty(M,F) \text{ à support compact},\ \langle s,t\rangle = 0) \Rightarrow s = 0 .$$

Si P est un endomorphisme de $C^\infty(M,F)$, un adjoint formel de P est un endomorphisme P^* de $C^\infty(M,F)$ tel que pour tout $s,t \in C^\infty(M,F)$, $\langle Ps,t\rangle = \langle s, P^*t\rangle$.
S'il existe, P^* est unique. De plus si P_1 et P_2 sont deux endomorphismes ayant des adjoints formels, alors P_1P_2 admet pour adjoint formel $P_2^*P_1^*$

On choisit pour $F = \Lambda T^*M$ de sorte que $C^\infty(M,F) = \Omega(M,\mathbb{R})$.
L'opérateur de dérivation de de Rham d est un endomorphisme de $\Omega(M,\mathbb{R})$.
On admet que d admet un adjoint formel d^* (cela découle du fait que d est un opérateur différentiel et que tout opérateur différentiel admet un adjoint formel)
On définit le laplacien $\Delta = dd^* + d^*d$.

Théorème de Hodge : Pour toute variété riemannienne compacte orientée,

$$\Omega(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\Delta \oplus \operatorname{Im}\Delta.$$ et $\operatorname{Ker}\Delta$ est de dimension finie.

Remarque : . si E est un espace euclidien et L un endomorphisme autoadjoint de E, alors on a bien $E = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im} L$.

. Le théorème est en fait vrai pour $C^\infty(M,F)$ muni d'un produit scalaire comme ci-dessus et P un opérateur différentiel elliptique de $C^\infty(M,F)$ formellement auto-adjoint. preuve plus tard pour le laplacien.

On note $\mathcal{H}(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\Delta$, l'espace des formes harmoniques réelles.

Conséquence : i) $\mathcal{H}(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker} d^*$,

ii) $\Omega(M,\mathbb{R}) = \mathcal{H}(M,\mathbb{R}) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d^*$ les termes étant 2 à 2 orthogonaux,

iii) $\operatorname{Ker} d = \mathcal{H}(M,\mathbb{R}) \oplus \operatorname{Im} d$ et donc $\mathcal{H}(M,\mathbb{R}) \simeq \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$

Preuve : $\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle = \|d\alpha\|^2 + \|d^*\alpha\|^2$ donc $\mathcal{H}(M) = \operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker} d^*$

d'après le théo de Hodge, $\Omega(M,\mathbb{R}) = \mathcal{H}(M) + \operatorname{Im} d + \operatorname{Im} d^*$. On voit facilement que les termes sont 2 à 2 orthogonaux (car $d^2 = 0$) donc la somme est directe.

Enfin $\mathcal{H}(M) \oplus \operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$ et si $d^*\alpha \in \operatorname{Ker} d$, alors $dd^*\alpha = 0$, donc $0 = \langle dd^*\alpha, \alpha\rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha\rangle$ donc $d^*\alpha = 0$. Conclusion : $\operatorname{Ker} d = \mathcal{H}(M) \oplus \operatorname{Im} d$.

Corollaire : si M est compacte orientée, $H^\ell(M,\mathbb{R})$ est de dimension finie.

tout cela peut s'adapter au cas où M n'est pas orientable, il suffit de choisir l'élément de volume μ dans $|\Omega|(M,\mathbb{R})$.

Remarque : si pour tout $p \in M$, les $\Lambda^k T_p^* M$, $k = 0, \dots, m$, sont 2 à 2 orthogonaux, alors les $\Omega^k(M, \mathbb{R})$ sont deux à deux orthogonaux. Du fait que $d(\Omega^k) \subset \Omega^{k+1}$, on a que $d^*(\Omega^k) \subset \Omega^{k-1}$ et donc $\Delta(\Omega^k) \subset \Omega^k$, ce qui implique que
$\mathcal{H}(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_k \mathcal{H}_k(M, \mathbb{R})$ où $\mathcal{H}_k(M, \mathbb{R}) = \mathcal{H}(M, \mathbb{R}) \cap \Omega^k(M, \mathbb{R})$
et donc on a un isomorphisme $\mathcal{H}_k(M, \mathbb{R}) \cong H^k(M, \mathbb{R})$.

Preuve de $d(\Omega^k) \subset \Omega^{k+1} \Rightarrow d^*(\Omega^k) \subset \Omega^{k-1}$: $\forall \alpha \in \Omega^k$, $d^*\alpha = \sum \beta_\ell$ avec $\beta_\ell \in \Omega^\ell$
$\langle d^*\alpha, \beta_\ell \rangle = \langle \alpha, d\beta_\ell \rangle = 0$ si $k \neq \ell + 1$ $\Rightarrow$ $\beta_\ell = 0$ si $\ell \neq k-1$.

Remarque pour la suite : si E et F sont deux espaces vectoriels sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un accouplement de E et F est une forme bilinéaire $E \times F \xrightarrow{b} k$.
Supposons E et F de dimension finie. Alors
$E \to F^*$, $x \mapsto b(x, \cdot)$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ $F \to E^*$, $y \mapsto b(\cdot, y)$ est un isomorphisme.
En effet, ces morphismes sont adjoints l'un de l'autre.
Si c'est le cas, on dit que b est non-dégénéré.

Opérateur $*$ de Hodge et dualité de Poincaré

Algèbre linéaire : soit E un espace euclidien (espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire). Alors ΛE a un produit scalaire donné par

$$\Lambda E \times \Lambda E \xrightarrow{(,)} \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p \to \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq p \\ \det(\alpha_i, \beta_j) \text{ si } m = p. \end{cases}$$

Preuve : $E \simeq E^*$ par l'application $x \to (x, \cdot)$. La forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ de ΛE devient l'accouplement $\Lambda E \times \Lambda E^* \to \mathbb{R}$, que l'on sait être non dégénéré (c'est de là que vient l'isomorphisme $\Lambda E^* \simeq (\Lambda E)^*$).
Donc $(,)$ est bien défini, non dégénéré.
Si e_i est une base orthonormée de E alors $(e_I, e_J) = \delta_{IJ}$. Donc $(\cdot,\cdot)$ est positif.

E^* hérite d'un produit scalaire de E par l'isomorphisme $x \to (x, \cdot)$
Donc ΛE^* est aussi euclidien. Si de plus E est orienté, $\Lambda^{top} E^*$ admet un élément canonique μ déterminé par $|\mu| = 1$ et $\mu \geqslant 0$.

L'opérateur $*$ de Hodge est l'endomorphisme de ΛE^* tel que

i) $*(\Lambda^k E^*) \subset \Lambda^{m-k} E^*$ pour tout k,

ii) $\forall\, \alpha, \beta \in \Lambda E^*$, $\quad \alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\, \mu$

Prop : $*$ est bien, c'est une isométrie de ΛE^*, $\forall \alpha \in \Lambda^k E^*$, $**\alpha = (-1)^{k(m-k)} \alpha$ et $\quad (\alpha, *\beta) = (-1)^{k(m-k)} (*\alpha, \beta)$

Preuve : $*$ existe bien car l'accouplement $\Lambda^k E^* \times \Lambda^{m-k} E^* \to \Lambda^m E^* = \mathbb{R}\mu$, $\alpha,\beta \to \alpha\wedge\beta$ est non dégénéré ($\dim \Lambda^k E^* = \dim \Lambda^{m-k} E^*$ et avec une base on voit que $(\alpha\wedge\beta = 0, \forall\beta) \Rightarrow \alpha = 0$)
Pour le calcul de $**\beta$, on peut supposer que $\beta = e_1\wedge\dots\wedge e_k$ où (e_i) est une base orthon. directe. On voit facilement que $*\beta = e_{k+1}\wedge\dots\wedge e_m$. De plus $e_{k+1},\dots,e_m, (-1)^{k(m-k)} e_1, e_2,\dots,e_k$ est directe, donc $**\beta = (-1)^{k(m-k)}\beta$.
le reste en exercice.

Revenons à notre variété M et donnons nous une métrique riemannienne g
Donc pour tout p de M, g_p est un produit scalaire de T_pM. D'après ce qui précède ΛT_p^*M hérite d'un produit scalaire h_p, $\Lambda^{top} T_p^* M$ a un élément canonique μ_p et l'on a un endomorphisme $*_p$ de ΛT_p^*M telle que $h_p(\alpha,\beta)\,\mu_p = \alpha\wedge *_p\beta$.
On vérifie que h_p, μ_p et $*_p$ dépendent de manière lisse de p, autrement dit

- h est une métrique de ΛT^*M,
- μ est un élément de volume, appelé élément de volume riemannien
- $* \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda T^*M))$

Théorème : l'adjoint formel de d pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\Omega(M,\mathbb{R})$ induit par μ et h est $d^*\alpha = (-1)^{m(k+1)+1} * d * \alpha$, $\forall \alpha\in \Omega^k(M,\mathbb{R})$.
Donc si $\Delta = dd^* + d^*d$, on a $\Delta * = (-1)^m * \Delta$

Preuve : on doit montrer que $\langle d\beta,\alpha\rangle + (-1)^{m(k+1)}\langle \beta, *d*\alpha\rangle = 0, \forall\beta$
si β homogène de degré $\neq k-1$, les deux termes sont nuls
si $\deg\beta = k-1$, $d(\beta\wedge *\alpha) = d\beta\wedge *\alpha + (-1)^{k+1}\beta\wedge d*\alpha$

$$= d\beta\wedge *\alpha + (-1)^{m(k+1)}\beta\wedge * * d*\alpha$$

car $\deg(d*\alpha) = 1+m-k$ et $k+1+(m+1-k)(m+1) = m(k+1)+1 \mod 2$

Conséquence : l'accouplement $H^\ell(M,\mathbb{R}) \times H^{m-\ell}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $[\alpha],[\beta] \to \int_M \alpha\wedge\beta$ est non dégénérée. Autrement dit, $(H^\ell(M,\mathbb{R}))^* = H^{m-\ell}(M,\mathbb{R})$.

Preuve : l'accouplement est bien défini en ce sens que $\int_M \alpha\wedge\beta$ ne dépend que des classes de cohomologie de α et β.

$*$ se restreint en un isomorphisme de $\mathcal{H}_\ell(M,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}_{m-\ell}(M,\mathbb{R})$. Donc $\dim H^\ell(M,\mathbb{R}) = \dim H^{m-\ell}(M,\mathbb{R})$.

Si $\alpha \in \mathcal{H}_\ell(M,\mathbb{R})$, $\int_M \alpha\wedge *\alpha = \|\alpha\|^2$. donc $\int_M \alpha\wedge\beta = 0$ $\forall \beta$ fermé $\Rightarrow \alpha = 0$

Les propriétés que n'ont pas les représentants harmoniques :

α, β harmoniques $\not\Rightarrow$ $\alpha\wedge\beta$ harmonique

α harmonique et $f : N \to M$ $\not\Rightarrow$ $f^*\alpha$ harmonique