Structures complexes :

E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Une structure complexe de E est un endomorphisme J de E tel que $J^2 = -\mathrm{id}$.

Exemple : tout espace vectoriel complexe vu comme un espace vectoriel réel admet pour structure complexe la multiplication par i.

Réciproquement, soit E muni d'une structure complexe J. Alors E admet une structure d'espace vectoriel complexe : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, on définit $(\alpha + i\beta)\, u := \alpha u + \beta J u$.

Cela implique que la dimension réelle de E est paire. Et d'ailleurs tout espace réel de dimension paire admet une structure complexe.

Complexification :

- E espace vectoriel réel, alors $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ est un espace vectoriel complexe.
  avec multiplication des scalaires : $\alpha(u\otimes\beta) = u\otimes(\alpha\beta)$.
- Application conjugaison $E\otimes\mathbb{C}\to E\otimes\mathbb{C}$, $u\otimes\alpha\to u\otimes\bar{\alpha}$.

C'est un iso réel, $\{z\in E\otimes\mathbb{C} \,/\, z=\bar{z}\} = \{x\otimes 1 \,/\, x\in E\}$

$\{ \text{——} \,/\, iz=\bar{z}\} = \{x\otimes i \,/\, x\in E\}$.

De plus $E\otimes\mathbb{C} = E\oplus iE$, décomposition en sous-espaces propres de $\bar{\ }$.

- Dual : $E^*\otimes\mathbb{C} = (E\otimes\mathbb{C})^*$ rajouter des $*_{\mathbb{C}}$ et $*_{\mathbb{R}}$.

  $E^{*_{\mathbb{R}}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{C})$ car $\mathrm{Hom}(E,F)\otimes G = \mathrm{Hom}(E,F\otimes G)$.

  $= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E\otimes\mathbb{C},\mathbb{C})$ on envoie $l : E\to\mathbb{C}$ sur l'extension $\tilde{l}$ telle que $\tilde{l}(u\otimes\lambda) = \lambda\, l(u)$.

- Base : (e_i) base de E $\to$ $(e_i\otimes 1)$ $\mathbb{C}$-base de $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

  (e_i^*) base duale $\rightsquigarrow$ $(e_i^*\otimes 1)$ $\mathbb{C}$-base de $E^*\otimes\mathbb{C}$

  qui est bien la base duale de $(e_i\otimes 1)$ par l'iso précédent.

- $f : E\to F$ application $\mathbb{R}$-linéaire avec F $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel.

  $\rightsquigarrow$ $f\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : E\otimes\mathbb{C}\to F\otimes\mathbb{C}$ unique extension $\mathbb{C}$-linéaire de f.

  $u\otimes\lambda\to f(u)\otimes\lambda$

- $\Lambda(E\otimes\mathbb{C}) = (\Lambda E)\otimes\mathbb{C}$, (e_i) base de E (dim finie)

  alors $e_I = e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p}$ base de $\Lambda^p E$, $I\subset\{1,\dots,n\}$, $|I|=p$.

  et c'est aussi une $\mathbb{C}$-base de $\Lambda(E\otimes\mathbb{C})$.

Retour sur les structures complexes.

Prop: l'endomorphisme $J \otimes id$ de $E \otimes \mathbb{C}$ est diagonalisable. Ses valeurs propres sont i et $-i$, les espaces propres correspondants sont :

$$E^{1,0} = \{ X - iJX \ / \ X \in E \} \quad \text{et} \quad E^{0,1} = \{ X + iJX \ / \ X \in E \}$$

de plus l'application de E dans $E^{1,0}$ envoyant X sur $X - iJX$ est un isomorphisme d'espace vectoriel complexe.

Preuve: petit calcul pour vérifier que $E^{1,0} \subset \mathrm{Ker}(J - i)$

en conjuguant $E^{0,1} \subset \mathrm{Ker}(J + i)$, puis $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} E^{1,0} = \dim_{\mathbb{R}} E^{0,1}$.

donc $E \otimes \mathbb{C} = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$ et ce sont bien les 2 espaces propres.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une $\mathbb{C}$-base de (E, J). Alors (e_i, Je_i) est une $\mathbb{R}$-base de E, $(e_i - iJe_i)$ est une $\mathbb{C}$-base de $E^{1,0}$, $(e_i + iJe_i)$ est une $\mathbb{C}$-base de $E^{0,1}$.

Soient (E, J_E), (F, J_F) deux espaces vectoriels munis d'une structure complexe.

Soit $f : E \to F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.

Alors $J_F \circ f = f \circ J_E$ sur E $\Leftrightarrow$ $f(E^{1,0}) \subset F^{1,0}$

$\Leftrightarrow$ $f(E^{0,1}) \subset F^{0,1}$.

Preuve: ...

Dual : si J est une structure complexe de E, alors J^t est une structure complexe de E^*. D'où $E^*\otimes\mathbb{C} \simeq (E^*)^{1,0}\oplus(E^*)^{0,1}$

avec $(E^*)^{1,0} = \mathrm{Ker}(J^t - i\,\mathrm{id})$ et $(E^*)^{0,1} = \mathrm{Ker}(J^t + i\,\mathrm{id})$.

Rappelons que $E^*\otimes\mathbb{C} \simeq (E\otimes\mathbb{C})^*$: on envoie $\ell : E\to\mathbb{C}$ sur son unique extension $\mathbb{C}$-linéaire de $E\otimes\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Alors $(E^*)^{1,0}$ et $(E^*)^{0,1}$ sont respectivement les orthogonaux de $E^{0,1}$ et $E^{1,0}$.

(en effet, $\ell(X+iJX) = 0 \iff (\ell + iJ^t\ell)(X) = 0$)

Et donc $(E^*)^{1,0}$ (resp. $(E^*)^{0,1}$) s'identifie au dual de $E^{1,0}$ (resp. $E^{0,1}$)

Autre point de vue : $(E^*)^{1,0} = \mathrm{Ker}(J^t - i)$ donc $\ell\in E^*\otimes\mathbb{C}$

appartient à $(E^*)^{1,0} \iff \ell\circ J = i\ell$ sur $E\otimes\mathbb{C} \iff \ell\circ J = i\ell$ sur E

Ainsi $(E^*)^{1,0}$ s'identifie par restriction à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((E,J),\mathbb{C})$.

Base : $(e_1,\dots,e_n)$ base complexe de (E,J) $\Rightarrow$ $(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$ base réelle de E

soit $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ base duale de E^*. Alors $J^t\alpha_i = -\beta_i$ et

$(\alpha_i + i\beta_i,\ i=1,\dots,n)$ base de $(E^*)^{1,0}$ duale de la base $(\frac{1}{2}(e_i - iJe_i),\ i=1,\dots,n)$ de $E^{1,0}$.

$(\alpha_i - i\beta_i,$ —— $)$ —— $(E^*)^{0,1}$ —— $(\frac{1}{2}(e_i + iJe_i),\ i=1,\dots,n)$ de $E^{0,1}$

Algèbre extérieure :

Introduisons $\Lambda^{p,q}E = \Lambda^p E^{1,0}\otimes\Lambda^q E^{0,1}$

Alors $\Lambda^k E\otimes\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k}\Lambda^{p,q}E$.

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $E^{1,0}$, alors $e_I\wedge\overline{e}_J$, $I,J\subset\{1,\dots,n\}$, $|I|=p$, $|J|=q$

est une base $\Lambda^{p,q}E$. Ici $e_I = e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_p}$ où $I=\{i_1,\dots,i_p\}$ et $i_1<\dots<i_p$.

La conjugaison de $\Lambda^k E\otimes\mathbb{C}$ envoie $\Lambda^{p,q}E$ sur $\Lambda^{q,p}E$.