Soit $L \to M$ fibré positif avec $M$ compacte.

Soit $s_k = \Pi_k(\rho\sigma^k)$ une section piquée en $p \in M$.

Ici, $\sigma : U \to L$ repère holomorphe en $p \in U$ avec $\varphi = -\ln|\sigma|^2$ qui est nul en $p$ et $>0$ sur $U \setminus \{p\}$. Enfin, $\rho \in C^\infty(M)$ est supporté dans $U$ et vaut 1 au voisinage de $p$.

Prop: $\exists k_0$ et $V$ voisinage de $p$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, $|s_k| > 0$ sur $V$

Preuve: on avait vu que $|s_k - \rho\sigma^k| \leqslant C e^{-k/C}$.

Soit $V = \{\rho = 1\} \cap \{-\ln|\sigma| \leqslant \frac{1}{2C}\}$ de sorte que $|\rho\sigma^k| \geqslant e^{-k/2C}$ sur $V$

Alors sur $V$ $|s_k| \geqslant |\rho\sigma^k| - |s_k - \rho\sigma^k| \geqslant e^{-k/2C}(1 - C e^{-k/2C})$

qui est $>0$ lorsque $k$ est grand.

Conséquence: $\exists k_0$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, le lieu de base de $L^k$ est vide.

Preuve: par la proposition précédente, il vient un recouvrement ouvert $M \subset \bigcup V_i$

et pour chaque $i$, un $k_i$ tel que $k \geqslant k_i \Rightarrow Bs(L^k) \cap V_i = \emptyset$

On extrait un sous-recouvrement fini $M \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_\ell}$ et on pose $k_0 = \max(k_{i_1}, \dots, k_{i_\ell})$.

Donc si $k \geqslant k_0$, l'application de Kodaira $\Phi_k : M \to \mathbb{P}^{N_k}$ est globalement définie

Soit $s'_k = \Pi_k(\rho' \sigma'^k)$ une section piquée en $p' \neq p$. On peut supposer que $\mathrm{Supp}\,\rho \cap \mathrm{Supp}\,\rho' = \phi$.

Prop: $\exists k_0$, $V$ et $V'$ voisinage de $p$ et $p'$ tels que $\forall k \geq k_0$, $|s_k| < |s'_k|$ sur $V$ et $|s'_k| < |s_k|$ sur $V'$.

Preuve: On a $|s_k - \rho\sigma^k| \leqslant C e^{-k/C}$ et $|s'_k - \rho' \sigma'^k| \leqslant C e^{-k/C}$.
Donc sur $V = \{\rho = 1\} \cap \{-\ln|\sigma| \leqslant \frac{1}{2C}\}$, $|s_k| \geqslant e^{-k/2C}(1 - C e^{-k/2C})$
Comme $V \subset \{\rho' = 0\}$, $|s'_k| \leqslant C e^{-k/C}$ sur $V$
D'où $|s_k| - |s'_k| \geqslant e^{-k/2C}(1 - 2C e^{-k/2C})$ qui est $> 0$ si $k$ suf. grand.

Conséquence : $\forall$ fermé $F$ de $M^2$ qui ne rencontre pas la diagonale, $\exists k_0$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, $\forall (x,y) \in F$, $L^k$ sépare $x$ et $y$.

Donc $\forall k \geqslant k_0$, $(x,y) \in F$, $\Phi_k(x) \neq \Phi_k(y)$.

Soit $p \in M$, $(z_i)$ système de coordonnées centrées en $p$.
$s_{i,k} = \Pi_k(\rho z_i \sigma^k)$ $\quad f_k : q \to \left( \frac{s_{1,k}(q)}{s_k(q)}, \dots, \frac{s_{n,k}(q)}{s_k(q)} \right)$

Lemme: $\exists$ V voisinage de $p$ et $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, la restriction de $f_k$ à $V$ est une immersion injective

Idée pour la preuve : soit $s_k = f_{0,k} \sigma^k$ et $s_{i,k} = f_{i,k} \sigma^k$

Comme auparavant on a que $|(f_{0,k} - \rho)\sigma^k|$, $|(f_{i,k} - z_i)\sigma^k| = O(e^{-k/c})$.

En travaillant plus, on a aussi $|(df_{0,k} - d\rho)\sigma^k|$, $|(df_{i,k} - d(\rho z_i))\sigma^k| = O(e^{-k/c})$

On en déduit un voisinage $V$ tel que $g_{i,k} = \frac{f_{i,k}}{f_{0,k}}$ vérifie $|dg_{i,k} - dz_i| \leq C' e^{-k/2c}$

D'où $\varphi_k$ immersion sur $V$ lorsque $k$ grand, mais aussi injective.

Conséquence : l'application de Kodaira $M \xrightarrow{\Phi_k} \mathbb{P}^{N_k}$ se restreint à $V$ en une immersion injective si $k \geq k_0$

Preuve : soit $(t_i)_{i=0,\dots,N_k}$ base $H^0(L^k)$. Alors $\Phi_k(z) = [t_0(z) : \dots : t_{N_k}(z)]$

Les sections $s_{i,k}$ sont des combinaisons linéaires des $t_i$, $s_{i,k} = \sum \lambda^i_j t_j$

Soit $l_i(z) = \sum \lambda^i_j z_j$ et $f : \mathbb{P}^{N_k} \to \mathbb{C}^n$, $[z] \to \left(\frac{l_1(z)}{l_0(z)}, \dots, \frac{l_n(z)}{l_0(z)}\right)$

défini en dehors de l'hyperplan $\{[z] / l_0(z) = 0\}$

Alors $\varphi_k = f \circ \Phi_k$.

Reste à conclure en exploitant à nouveau la compacité de $M$.

Théo : Si $L \to M$ est positif avec $M$ compact, il existe $k_0$ tel que $\forall k \geq k_0$, l'application de Kodaira $M \to \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ est un plongement.