Opérateurs ∂ et $\bar\partial$: soit M une variété complexe

Pour tout entier p, q compris entre 0 et n et $x \in M$, on introduit :

$$\Lambda^{p,q} T_x^* M = \Lambda^p (T_x^* M)^{1,0} \otimes \Lambda^q (T_x^* M)^{0,1} \quad \text{et} \quad \Lambda^{p,q} T^* M = \coprod_{x\in M} \Lambda^{p,q} T_x^* M.$$

$\Lambda^{p,q} T^* M$ est un fibré vectoriel tel que pour tout système de coordonnées complexes $(U, z_1, \dots, z_n)$, $(dz_I \wedge d\bar z_J,\ I, J \subset \{1, \dots, n\},\ |I| = p,\ |J| = q)$ est un repère de $\Lambda^{p,q} T^* M$. Ici, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ et $i_1 < \dots < i_p$.

de même, $d\bar z_J = \dots = \overline{dz_J}$

On note $\Omega^{p,q}(M)$ l'espace des sections de $\Lambda^{p,q} T^* M$.

Pour tout k, on a un isomorphisme $\Lambda^k (TM \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^* M$

et donc $\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$

Proposition : Il existe une unique application linéaire $\partial : \Omega(M, \mathbb{C}) \to \Omega(M, \mathbb{C})$ de bidegré $(1,0)$, ie $\alpha \in \Omega^{p,q}(M) \Rightarrow \partial\alpha \in \Omega^{p+1,q}(M)$, telle que $d = \partial + \bar\partial$.

On a : $\partial^2 = 0$, $\partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$

et $\forall \alpha \in \Omega^k(M, \mathbb{C})$, $\forall \beta \in \Omega(M, \mathbb{C})$ $\quad \partial(\alpha \wedge \beta) = (\partial\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \partial\beta$

Preuve : comme pour $\Omega(U)$ où U ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Remarque : le conjugué $\bar\partial$ vérifie $\bar\partial^2 = 0$ et $\bar\partial(\alpha \wedge \beta) = (\bar\partial\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \bar\partial\beta$

si $f \in C^\infty(M)$, $\bar\partial f = 0 \iff f$ est holomorphe.

Soit $E \to M$ un fibré holomorphe.

On note $\Omega^{p,q}(M,E)$ l'espace des sections de $(\Lambda^{p,q} T^*M) \otimes E$

Prop : Il existe un opérateur $\bar\partial : \Omega^{p,q}(M,E) \to \Omega^{p,q+1}(M,E)$ tel que pour tout $\alpha \in \Omega^{p,q}(M,E)$, pour tout repère holomorphe $(U, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ de E, on ait :

$$\alpha = \sum \alpha_i \otimes \sigma_i \text{ sur } U \Rightarrow \bar\partial \alpha = \sum (\bar\partial \alpha_i) \otimes \sigma_i$$

Preuve : supposons que (σ_i) et (σ_i') soient deux repères hololomorphes de E définis sur le même ouvert U. On a $\sigma_i = \sum_j g_{ij} \sigma_j'$ avec une matrice de transition (g_{ij}) holomorphe.

$$\alpha = \sum \alpha_i \otimes \sigma_i = \sum \alpha_j' \otimes \sigma_j' \Rightarrow \alpha_j' = \sum_i g_{ij} \alpha_i \Rightarrow \bar\partial \alpha_j' = \sum_i g_{ij} \bar\partial \alpha_i$$

$$\Rightarrow \sum \bar\partial \alpha_i \otimes \sigma_i = \sum \bar\partial \alpha_j' \otimes \sigma_j'.$$

Propriétés : $\bar\partial(\alpha \wedge \beta) = (\bar\partial \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \bar\partial \beta \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M,\mathbb{C})$ et $\beta \in \Omega(M,E)$

$\bar\partial^2 = 0$ sur $\Omega(M,E)$.

$\operatorname{Ker}(\bar\partial : \Omega^{0,0}(M,E) \to \Omega^{0,1}(M,E)) = \mathcal{O}(M,E)$.

Le complexe de Dolbeault de E est : $\qquad n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

$$0 \to \Omega^{0,0}(M,E) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1}(M,E) \to \dots \to \Omega^{0,n}(M,E) \to 0$$

Ces groupes de cohomologie sont les groupes de cohomologie de Dolbeault.

$H^0_{Dol}(M,E) = \mathcal{O}(M,E)$.

On note $H^{p,q}(M,E) = H^q_{Dol}(M, E \otimes \Lambda^p(T^*M)^{1,0})$. Il s'agit du $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe :

$$0 \to \Omega^{p,0}(M,E) \to \Omega^{p,1}(M,E) \to \dots \to \Omega^{p,m}(M,E) \to 0.$$

En effet, par définition $\Omega^{p,q}(M,E) = \Gamma(M, \Lambda^{p,q}T^*M \otimes E) = \Omega^{0,q}(M, E \otimes \Lambda^p(T^*M)^{1,0})$ et on vérifie que l'opérateur $\bar\partial$ est le même.

On note $H^{p,q}(M) = H^{p,q}(M, \mathbb{C}_M)$ où $\mathbb{C}_M \to M$ est le fibré trivial.

Exercice : Montrer que les applications suivantes sont bien définies :

$H^{p,q}(M) \times H^{p',q'}(M) \longrightarrow H^{p+p',q+q'}(M)$, $[\alpha],[\beta] \longrightarrow [\alpha\wedge\beta]$

$H^{p,q}(M) \times H^{m-p,m-q}(M) \to \mathbb{C}$, $[\alpha],[\beta] \longrightarrow \int_M \alpha\wedge\beta$ où M est supposée compacte

$H^{p,q}(M) \to H^{p,q}(N)$, $[\alpha] \to [f^*\alpha]$ où $f : N \to M$ est holomorphe.

Question qui va nous occuper par la suite : Quel rapport existe-t-il entre la cohomologie de Dolbeault et la cohomologie de de Rham ?