Géométrie complexe et la théorie de Hodge
TD 2

Exercice 1. Soit X une variété complexe. On définit la cohomologie de Bott-Chern $H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C})$:

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) := \frac{\{\alpha \in \Omega^{p,q}(X) | d\alpha = 0\}}{\mathrm{Image}\big(\partial\overline{\partial} : \Omega^{p-1,q-1}(X) \to \Omega^{p,q}(X)\big)}.$$

Montrer que $H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C})$ est bien définit et il y a des applications naturelles

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}(X)$$

et

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p+q}(X,\mathbb{C}).$$

Exercice 2. (Variétés d'Iwasawa)

Soit G le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$ formé par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $x, y, z \in \mathbb{C}$. Soit $\Gamma \subset G$ le sous-groupes des matrices telle que $x, y, z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que G/Γ a une structure naturelle de variété complexe compacte. Montrer que $dx, dy, dz - xdy \in H^0(G, \Omega_G)$ induisent des 1-formes sur G/Γ.

Exercice 3. Prouver que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) = 0$ si $k < 0$, et $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \simeq \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^{n+1})$ si $k \geq 0$.

Exercice 4. Variété grassmannienne et plongement de Plücker.

Soit $n \geq 2$ un nombre naturel et $0 < r < n$ entier. On définit la variété grassmannienne comme l'ensemble

$$G(r, \mathbb{C}^n) := \{S \subset \mathbb{C}^n \text{ sous-espace vectoriel de dimension } r\}.$$

Posons $U(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ pour le groupe unitaire.

a) Montrer qu'on a une application surjective

$$U(n,\mathbb{C}) \to G(r,\mathbb{C}^n).$$

On munit $G(r, \mathbb{C}^n)$ de la topologie quotient donnée par la surjection $U(n, \mathbb{C}) \to G(r, \mathbb{C}^n)$. On définit des cartes sur $G(r, \mathbb{C}^n)$ comme suit : pour tout $T_i \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$, soit

$$U_i := \{S \subset \mathbb{C}^n \text{ sous-espace vectoriel de dimension } r | S \cap T_i = 0\}.$$

Soit $S_i \in U_i$ arbitraire, alors on peut définir une application

$$\phi_i : U_i \to \mathrm{Hom}(S_i, T_i) \simeq \mathbb{C}^{r(n-r)}$$

en associant à $S \in U_i$ l'unique application $\mathbb{C}$-linéaire $f \in \mathrm{Hom}(S_i, T_i)$ telle que

$$S \subset \mathbb{C}^n = S_i \oplus T_i$$

est le graphe de f.

b) Montrer que les applications $\phi_i = \phi_i(S_i, T_i)$ définissent une structure complexe sur $G(r, \mathbb{C}^n)$.

On définit une application

$$\psi : G(r, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{P}(\wedge^r \mathbb{C}^n)$$

comme suit : soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace de dimension r et soit $u_1, \cdots, u_r$ une base de U. Le multivecteur $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ donne un point dans $\mathbb{P}(\wedge^r \mathbb{C}^n)$.

c) Monter que ψ est bien définie. Montrer que ψ est un plongement (dite de Plücker).

d) Montrer que $G(r, \mathbb{C}^n)$ est une variété projective.

e) Soit $e_1, \cdots, e_4$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Chaque 2-vecteur $w \in \wedge^2 \mathbb{C}^4$ a une unique décomposition

$$w = X_0 e_1 \wedge e_2 + X_1 e_1 \wedge e_3 + X_2 e_1 \wedge e_4 + X_3 e_2 \wedge e_3 + X_4 e_2 \wedge e_4 + X_5 e_3 \wedge e_4.$$

Montrer que pour les coordonnées homogènes $[X_0 : \cdots : X_5]$ sur $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4)$, le plongement de Plücker de $G(2, \mathbb{C}^4)$ dans $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{P}^5$ a l'équation

$$X_0 X_5 - X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0.$$

Indication : $im(\psi)$ peut être identifié aux multivecteurs $w \in \wedge^r \mathbb{C}^n$ qui sont décomposables, c'est à dire il existe des vecteurs $v_1, \cdots, v_r \in \mathbb{C}^n$ tels que $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$.

Pour tout $w \in \wedge^r \mathbb{C}^n$, on considère l'application linéaire

$$\phi_w : \mathbb{C}^n \to \wedge^{r+1} \mathbb{C}^n, v \to v \wedge w.$$

Montrer que w est décomposable si et seulement si $\mathrm{rg}\phi_w \leq n - r$.