# Une introduction à la théorie de Hodge et à la géométrie kählerienne
# TD 4

**Exercice 1.** Soient $(L, h_L), (A, h_A)$ deux fibrés en droites holomorphes hermitiennes sur une variété complexe $X$.

(i) Vérifier que $h_L$ et $h_A$ induisent une métrique naturelle $h$ sur $L \otimes A$ et une métrique naturelle $h_L^*$ sur $L^*$.

(ii) Prouver que

$$i\Theta_{h_L}(L) + i\Theta_{h_A}(A) = i\Theta_h(L \otimes A)$$

et

$$i\Theta_{h_L}(L) = -i\Theta_{h_L^*}(L^*).$$

(iii) Prouver que $A$ est positif si et seulement si $A^{\otimes k}$ est positif pour tout $k > 0$.

(iv) Prouver que si $A$ est positif, alors $A^{\otimes k} \otimes L$ est positif pour tout $k$ suffisamment grand.

(v) Prouver que si $X$ est compacte et $A$ est positif, alors $H^0(X, A^*) = 0$.

**Exercice 2.** Soit $A \in GL(n+1, \mathbb{C})$. On note $F_A : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ l'isomorphisme induit par $A$. Montrer que $F_A^* \omega_{FS} = \omega_{FS}$ si et seulement si $A \in U(n+1)$.

**Exercice 3.**

Soient $L \to X$ et $K \to Y$ deux fibrés en droites holomorphes. Montrer que si les espaces de sections holomorphes de $L$ et $K$ sont tous deux de dimension finie, alors l'application naturelle

$$H^0(X, L) \otimes H^0(Y, K) \to H^0(X \times Y, L \boxtimes K)$$

est un isomorphisme.

**Exercice 4.** Soient $X$ et $Y$ deux variétés complexes compactes, et $A \to X$ et $B \to Y$ deux fibrés en droites positifs.

(i) Déterminer un fibré en droites ample sur le produit $X \times Y$. En déduire que le produit de deux variétés projectives est une variété projective.

(ii) Etudier en détail le cas $X = \mathbb{P}^n$, $Y = \mathbb{P}^m$, $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ et $B = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$. Montrer que le plongement de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$ donné par le système linéaire complet $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ est défini par

$$([z_0 : z_1 : \ldots : z_n], [z'_0 : z'_1 : \ldots : z'_m]) \to [z_0 z'_0 : z_0 z'_1 : \ldots : z_n z'_m]$$

On l'appelle le plongement de Segre.