Géométrie complexe, feuille 5

Exercice 1. (Fibré déterminant)

Soient A, B et C des fibrés vectoriels complexes de même base M.

1. Montrer que pour tout fibré en droites complexes $L \to M$, on a un isomorphisme canonique
$$\det(A \otimes L) = \det(A) \otimes L^n$$
où n est le rang de A.
2. Montrer que pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$, l'on a un isomorphisme canonique
$$\det(B) = \det(A) \otimes \det(C).$$
3. Soit X une variété complexe. Montrer que le fibré canonique d'une sous-variété Y de X est isomorphe à $j^*K \otimes N$ où K est le fibré canonique de X, N est le fibré normal de Y et j est l'injection de Y dans X.
4. Que peut-on dire lorsque $Y = \{s = 0\}$ où s est une section holomorphe d'un fibré en droites holomorphe $L \to M$ telle que pour tout $p \in Y$, $d_p s \neq 0$?

Exercice 2. (fibrés canoniques des variétés projectives)

1. Montrer que le canonique de $\mathbb{P}^n$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.
2. Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, homogéne de degré p et dont 0 est une valeur régulière. Montrer que le fibré canonique de $Z = \{[z] \in \mathbb{P}^n / f(z) = 0\}$ est isomorphe à la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1+d)$.
3. Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^p$ une submersion holomorphe au dessus de 0 dont les coordonnées sont homogènes. Déterminer le fibré canonique de $Z = \{[z] \in \mathbb{P}^n / f(z) = 0\}$.

Exercice 3. (Éclatements)

1. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ où U est un voinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$. Montrer que si $f(0) = 0$, alors il existe $f_1, \ldots, f_n$ holomorphe définies au voisinage de 0 telles que $f = \sum f_i z_i$.
2. Montrer que l'éclatement d'une variété X en un point p, tel qu'il a été défini en cours, ne dépend pas d'un choix de carte en p.