Géométrie complexe, feuille 1

Exercice 1. (Complexification)

Soit E, F des espaces vectoriels réels et G un espace vectoriel complexe, tous de dimension finie.

1. Montrer que $E \otimes_{\mathbb{R}} G$ a une structure d'espace vectoriel complexe naturelle. En donner une base. Montrer que $E \otimes_{\mathbb{R}} G = (E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} G$.
2. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, G) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E \otimes \mathbb{C}, G)$.
3. Montrer que $(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus (F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = (E \oplus F) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $(E \otimes_{\mathbb{R}} F) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ et $(\wedge E) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \wedge(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$
4. Montrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors l'application $f \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ de $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ admet pour image et noyau $\mathrm{im}\, f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\ker f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Exercice 2. (Formule de Cauchy et variantes)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et D un disque ouvert d'adhérence contenue dans Ω.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Montrer que pour tout $z \in D$,
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}. \qquad (1)$$
Pour cela, on appliquera la formule de Stokes à $f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$ sur $D \setminus B(z, \epsilon)$ et l'on fera tendre ϵ vers 0.
2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ à support compact et f la fonction de $\mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} g(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\partial f / \partial \bar{z} = g$. Pour cela, on dérivera sous le signe somme après avoir fait le changement de variable $\zeta' = \zeta - z$, puis on reviendra à la variable ζ et on conclura avec la formule (1).

3. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\partial f/\partial \bar{z} = g$ sur D.

4. Montrer dans les deux questions précédentes que si g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut trouver f de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer de même que si g dépend de manière lisse ou holomorphe de paramètres supplémentaires, alors f est aussi lisse ou holomorphe en ces paramètres.

Exercice 3. (Cohomologie de Dolbeault d'un disque ouvert)
Soit D un disque ouvert ou bien $D = \mathbb{C}$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(D)$. Montrons qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ telle que $\partial f/\partial \bar{z} = g$. Pour cela, donnons nous une suite (D_n) de disques ouverts tels que $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ pour tout n et $\bigcup_n D_n = D$. Montrer qu'il existe $f_n \in \mathcal{C}^\infty(D)$ telle que $\partial f_n/\partial \bar{z} = g$ sur D_n. Montrer que l'on peut aussi supposer que $|f_{n+1} - f_n| \leqslant 2^{-n}$ sur D_{n-1}. En déduire que la suite (f_n) converge vers une fonction f qui convient.

2. Décrire les espaces de cohomologie de Dolbeault de D.

Plus généralement, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et tout $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ telle que $\partial f/\partial \bar{z} = g$, cf. le livre de Hörmander (théorème 1.4.4).

Exercice 4. (Lemme de Dolbeault-Grothendieck)
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et D un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont l'adhérence est incluse dans U. Soit $p = 0, \ldots, n$ et $q = 1, \ldots, n$. Nous allons montrer que pour tout $\alpha \in \Omega^{p,q}(U)$,

$$\overline{\partial}\alpha = 0 \Rightarrow \exists \beta \in \Omega^{p,q-1}(D) \text{ tel que } \overline{\partial}\beta = \alpha. \tag{2}$$

1. Montrer que l'on peut se ramener à $p = 0$. Utiliser pour cela que toute forme α de $\Omega^{p,q}(U)$ s'écrit $\alpha = \sum_{|I|=p} \alpha_I \wedge dz_I$ avec des $\alpha_I \in \Omega^{0,q}(U)$ uniquement déterminés.

2. Soit $\alpha \in \Omega^{0,q}(U)$. Montrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha = d\bar{z}_k \wedge \gamma + \delta$ avec γ et δ dans $\Omega_k(U)$. Ici $\Omega_k(U)$ désigne la sous-algèbre de $\Omega(U)$ engendrée par $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{k-1}$ et $\mathcal{C}^\infty(U)$.

3. Supposons $k = 1$ de sorte que $\delta = 0$ et γ est une fonction. En appliquant le premier exercice, montrer (2)

4. Montrons (2) par récurrence sur k. Pour cela, considérer $\mu \in \Omega^{0,q-1}(D)$ obtenue à partir de γ en remplaçant chaque coefficient $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ par une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telle que $\partial g/\partial \bar{z}_k = f$ sur D. Montrer que si $\overline{\partial}\alpha = 0$, on peut choisir μ de sorte que $\overline{\partial}\mu = d\bar{z}_k \wedge \gamma + \nu$ avec ν dans $\Omega_k(U)$. Conclure.

Exercice 5. (Cohomologie de Dolbeault d'un polydisque)

Soit $D = \prod_{i=1}^{m} \Delta_i$ avec chaque Δ_i qui est un disque ouvert ou bien $\mathbb{C}$.

1. Décrire $H^{p,0}(D)$ pour tout p.
2. Montrons que $H^{p,q}(D) = 0$ si $q \geqslant 2$. Soit $\alpha \in \Omega^{p,q}(D)$ tel que $\overline{\partial}\alpha = 0$. Donnons nous une suite (D_n) de polydisques de $\mathbb{C}^m$ telle que $\bigcup_n D_n = D$ et $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$. Déduire du lemme de Dolbeault qu'il existe une suite (β_n) de $\Omega^{p,q-1}(D)$ telle que $\overline{\partial}\beta_n = \alpha$ sur D_n et $\beta_{n+1} = \beta_n$ sur D_{n-1}. Conclure.
3. Montrer que $H^{p,1}(D) = 0$ en s'inspirant de la question précédente et du deuxième exercice.

Exercice 6. (Théorème de prolongement)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^2$, D un polydisque fermé de Ω et $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$.

1. Montrer qu'il existe un polydisque ouvert $D' = D'_1 \times D'_2$ contenant D et d'adhérence contenue dans U.
2. Soit $g \in \mathcal{O}(D')$ définie par

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D'_1} \frac{f(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

   Montrer que $g = f$ sur $(U \setminus D) \cap D'$.
3. Montrer que f se prolonge holomorphiquement à U.
4. Etendre le résultat en dimension $\geqslant 3$ et montrer qu'il est faux en dimension 1.

Exercice 7.

Soit $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Montrons que $H^{0,1}(U) \neq 0$.

1. Soit $r^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$, Remarquons que $\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} + \frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2}$. En déduire qu'il existe $\omega \in \Omega^{0,1}(U)$ tel que

$$\omega = \overline{\partial}\Big(\frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2}\Big) \text{ si } z_1 \neq 0$$

2. Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telle que $\overline{\partial} f = \omega$. Montrer alors que la fonction $g = z_1 f - \bar{z}_2 r^{-2}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2$. Aboutir à une contradiction.