Géométrie complexe, feuille 2

Soit M une variété munie d'un élément de volume μ, et E, F deux k-fibrés vectoriel de base M équippé de métriques h_E, h_F.

Exercice 1. (Adjoint formel)

1. On définit pour tout $u, v \in \Gamma(M, E)$ tels que $(\operatorname{supp} u) \cap (\operatorname{supp} v)$ soit compact
$$\langle u, v \rangle = \int_M h_E(u, v)\mu.$$
Expliquer en quel sens $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré.

2. Si $P : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$ est un opérateur, i.e. une application linéaire, un adjoint formel de P est un opérateur $P^* : \Gamma(M, F) \to \Gamma(M, E)$ tel que pour tout $f \in \Gamma(M, E)$ et $g \in \Gamma(M, F)$, tout deux à support compact, l'on ait $\langle Pf, g \rangle = \langle f, P^* g \rangle$. Montrer que s'il existe, P^* est unique.

Exercice 2. (Opérateurs de degré 0)

1. Montrer que toute section du fibré $\operatorname{Hom}(E, F) \to M$ définit un opérateur $\Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$. Montrer que cet opérateur admet un adjoint formel.

2. On suppose que M munie d'une métrique riemannienne et l'on equipe $\wedge T^*M$ de la métrique correspondante. Si $\alpha \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$, on introduit l'opérateur $e(\alpha)$ de $\Omega(M, \mathbb{R})$ qui envoie β sur $\alpha \wedge \beta$. Montrer que l'adjoint formel de $e(\alpha)$ est le produit intérieur par un champ de vecteur X que l'on déterminera.

Exercice 3. (Dérivation par rapport à un champ de vecteur)

Soit k^r_M le fibré trivial de base M et rang r. Soit X un champ de vecteurs de M et D_X l'opérateur de $\Gamma(M, k^r_M) \simeq \mathcal{C}^\infty(M, k^r)$ donné par

$$(D_X f)_\ell = X.f_\ell, \qquad \ell = 1, \dots, r$$

pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M, k^r)$.

Montrer que D_X admet un adjoint formel et l'expliciter lorsque k_M^r est muni d'une métrique à coefficients constants, puis d'une métrique quelconque.

Exercice 4. (Laplacien)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une métrique riemanienne g. Comme on l'a fait en cours, on définit l'opérateur $\Delta = d^*d + dd^*$ agissant sur $\Omega(U, \mathbb{R})$. Montrer que Δ est un Laplacien. Pour ce faire, on utilisera les exercices précédents et on écrira

$$d = \sum_{i=1}^{n} e(dx_i) \circ D_{\partial/\partial x_i}.$$

On traitera pour commencer le cas où g est une métrique à coefficients constants.

Exercice 5. (Opérateurs locaux)

On dit qu'un opérateur $P : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$ est local si pour tout $f \in \Gamma(M, E)$, le support de Pf est contenu dans le support de f. On notera $\mathcal{L}(M, E, F)$ l'ensemble des opérateurs locaux de E dans F.

1. Donner des exemples de tels opérateurs.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathcal{L}(M, E, F)$ et tout ouvert U de M, il existe un unique $Q \in \mathcal{L}(U, E, F)$ tel que pour tout $f \in \Gamma(M, E)$, $(Pf)|_U = Q(f|_U)$. On appelle Q la restriction de P à U et on la note $P|_U$. [1]
3. Expliquer en quel sens la composition est compatible avec la restriction.
4. Montrer si $P \in \mathcal{L}(M, E, F)$ admet un adjoint formel, celui-ci est local.
5. Montrer que si $P \in \mathcal{L}(M, E, F)$ admet pour adjoint formel P^* et U est un ouvert de M, alors $P|_U$ admet pour adjoint formel $P^*|_U$. Montrer que si $P \in \mathcal{L}(M, E, F)$ et qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de M tel que pour tout i, $P|_{U_i}$ admette un adjoint formel, alors P admet un adjoint formel.
6. Montrer que si M est riemannienne, $\Delta = dd^* + d^*d$ est un laplacien.

[1] L'étudiant courageux pourra montrer que l'on obtient un faisceau sur M.