Géométrie complexe, feuille 3

Soit $L \to M$ un fibré en droite holomorphe de base compacte. On note $E = H^0(M, L)$ l'espace des sections holomorphes. Pour tout $x \in M$, nous avons une application linéaire $\lambda_x : E \to L_x$ donnée par

$$\lambda_x(s) = s(x), \qquad \forall\, s \in E. \tag{1}$$

En identifiant L_x avec $\mathbb{C}$, λ_x devient une forme linéaire de E bien définie multiplication par un scalaire non nul près. Le *lieu de base* de L est la partie $\mathrm{B}(L)$ de M formée des points x tels que $\lambda_x = 0$. On verifiera que $\mathrm{B}(L)$ est fermé. Soit φ_L l'application de $M \setminus \mathrm{B}(L)$ to $\mathbb{P}(E^*)$ qui envoie x sur $[\lambda_x]$. Le fibré L est dit *très ample* si $\mathrm{B}(L) = \emptyset$ et φ_L est un plongement.

Exercice 1. (Plongement de Kodaira)

1. On se donne une base $(s_0, \ldots, s_N)$ de E de sorte à identifier E^* avec $\mathbb{C}^N$. Soit $\sigma : U \to L$ un repère holomorphe. Montrer que
$$\varphi_L(x) = [f_0(x) : \ldots : f_N(x)], \qquad \forall x \in U$$
où pour tout i, $s_i = f_i \sigma$ sur U. En déduire que φ_L est holomorphe.

2. Montrer que pour tout $x, y \in M \setminus \mathrm{B}(L)$, $\varphi_L(x) \neq \varphi_L(y)$ si et seulement si il existe $s \in E$, tel que $s(x) \neq 0$ et $s(y) = 0$.

3. Soit s une section de L s'annulant en x et σ un repère holomorphe en x. Montrer que $d_x s := d_x(s/\sigma) \otimes \sigma(x) \in T_x^* M \otimes L_x$ ne dépend pas du choix de σ.

4. Montrer que φ_L est une immersion en $x \in M \setminus \mathrm{B}(L)$ si et seulement si la famille des $d_x s$, où s décrit les sections holomorphes de L s'annulant en x, engendre $(T_x^{1,0} M)^* \otimes L_x$.

Exercice 2. (Plongement de Segre)

On rappelle que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) \simeq \mathbb{C}_k[z_0, \ldots, z_n]$.

1. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, on note U_i l'ouvert $\{[z] \in \mathbb{P}^n / z_i \neq 0\}$ et $\sigma_i \in \mathcal{O}(U_i, \mathcal{O}(-1))$ le repère local défini par $\sigma_i([z]) = (z_0/z_i, \ldots, z_n/z_i)$. Pour tout $P \in \mathbb{C}_k[z_0, \ldots, z_n]$, exprimer la section correspondante dans le repère σ_i^{-k}.

2. Expliciter en coordonnées homogènes l'application $\varphi_L : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ pour $L = \mathcal{O}(k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que c'est un plongement.

Exercice 3. (fibrés très amples)

1. Montrer que si $L \to M$ est très ample, alors L^k est très ample pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si $L \to M$ est très ample et N est une sous-variété complexe de M, alors $L|_N$ est très ample.

Exercice 4. (Plongement de Plücker)

Soit k, n deux entiers tels que $1 \leqslant k < n$. Soit $\mathrm{G}_{k,n}$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$. Soit ξ l'application de $\mathrm{G}_{k,n}$ dans $\mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n)$ qui envoie U sur $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ où (e_i) est une base de U. Le but de l'exercice est de munir $\mathrm{G}_{k,n}$ d'une structure de variété complexe et de montrer que ξ est un plongement.

Notons $\mathrm{M}(n,k)$ l'espace des matrices à coefficients complexes avec n lignes et k colonnes, O le sous-ensemble de $\mathrm{M}(n,k)$ formé des matrices de rang k. Si $A \in \mathrm{M}(n,k)$ et I est une partie de $\{1,\ldots,n\}$, on note A_I la matrice extraite de A formée des lignes indicées par les éléments de I, V_I le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par les vecteurs de la base canonique indicés par I.

1. Montrer que O est un ouvert de $\mathrm{M}(n,k)$. Montrer que l'application qui envoie $A \in O$ sur son image induit une bijection de $O/\operatorname{Gl}(k)$ sur $\mathrm{G}_{k,n}$. Dans la suite on identifie $\mathrm{G}_{k,n}$ et $O/\operatorname{Gl}(k)$ et on note π la projection de O sur $\mathrm{G}_{k,n}$.
2. On munit $\mathrm{G}_{k,n}$ de la topologie quotient. Montrer que $\mathrm{G}_{k,n}$ est connexe, compact.
3. Soit $I \subset \{1,\ldots,n\}$ avec k éléments et J son complémentaire. Soit $O_I = \{A \in O / \det(A_I) \neq 0\}$. Soit φ_I l'application de O_I dans $\mathrm{M}(n-k,k)$ qui envoie A sur $\left(AA_I^{-1}\right)_J$. Montrer que φ_I se factorise en une application Φ_I de $\pi(O_I)$ dans $\mathrm{M}(n-k,k)$. Montrer que la famille des $(\pi(O_I), \Phi_I)_I$ est un atlas holomorphe de $\mathrm{G}_{k,n}$.
4. Montrer que $\pi(O_I)$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces U en somme directe avec V_J. Montrer que l'application réciproque de Φ_I envoie $f \in \mathrm{M}(n-k,k) = \mathcal{L}(V_I, V_J)$ sur son graphe.
5. Montrer que l'application ξ est bien définie et injective.
6. Montrer que ξ est un plongement.