1 Rappels de calcul différentiel

1.1 Topologie des espaces vectoriels de dimension finie

Assurez-vous de bien comprendre le texte suivant et rappelez les définitions importantes.

Un espace vectoriel de dimension finie E admet une *norme*. Celle-ci définit une *distance* et par conséquent une *topologie* $\mathcal{T}$ sur E. Du fait que E soit de dimension finie, toutes ses normes sont *équivalentes* et par conséquent $\mathcal{T}$ ne dépend pas du choix de la norme.

Si F est un autre espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E, on définit la notion d'application *continue* de U dans F. L'ensemble $C^0(U, F)$ ainsi défini est une espace vectoriel. La composée de deux applications continues est continue.

En dimension finie toutes les applications linéaires sont continues. Plus généralement les applications *multilinéaires* et les applications *polynomiales* sont toutes continues. Plus précisément, si f est multinéaire de $E_1 \times \ldots \times E_k \to F$ dans F et $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_k$ sont des normes de $F, E_1, \ldots, E_k$ respectivement, alors il existe C tel que

$$\|f(e_1, \ldots, e_k)\| \leqslant C\|e_1\|_1 \ldots \|e_k\|_k.$$

pour tout $(e_1, \ldots, e_k) \in E_1 \times \ldots \times E_k$.

Si F est un produit d'espaces vectoriels $F_1 \times \ldots \times F_k$, alors une application $U \to F$ est continue ssi ses applications coordonnées $U \to F_i$ le sont. Supposons que la source E soit un produit $E_1 \times \cdots \times E_\ell$ et donnons nous des ouverts $U_1, \ldots, U_\ell$ de $E_1, \ldots, E_\ell$ respectivement. Si f est continue de $U_1 \times \ldots \times U_\ell$ dans F, alors les applications partielles

$$U_i \to F, \qquad x_i \to f(x_1, \ldots, x_k)$$

sont continues. La réciproque est fausse, on le vérifiera sur l'exemple suivant

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1.2 Différentiabilité

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est différentiable en $x \in U$, si il existe une application linéaire $L : E \to F$ tel que

$$f(x + h) = f(x) + L.h + o(\|h\|_E).$$

Si c'est le cas, L est unique. On l'appelle la dérivée de f en x et on la note $f'(x)$ ou $Df(x)$. Lorsque $F = \mathbb{R}$, on l'appelle aussi la différentielle et on la note souvent $d_x f$. f est dite de classe C^1 sur U si elle différentiable sur U et l'application dérivée

$$U \to \mathcal{L}(E, F), \quad x \to Df(x)$$

est continue.

Il est important de constater que ces définitions ne dépendent pas du choix de la norme $\| \cdot \|_E$. L'ensemble des fonctions différentiables (resp. de classe C^1) de U dans F est un espace vectoriel. Dans les exercices qui suivent, on rappelle les propriétés élémentaires de la différentiation. On envisagera à chaque fois le cas C^1.

Exercice 1.1 (*Cas particuliers)*. Que signifie f différentiable en x lorsque $E = F = \mathbb{R}$ ou lorsque $E = \mathbb{R}$?

Exercice 1.2 (*Exemples)*. Montrer que les applications constantes, linéaires ou multilinéaires sont différentiables et donner leur dérivée.

Exercice 1.3 (*Composition)*. La composée de deux fonctions différentiables est différentiable, la dérivée étant la composée des dérivées.

Exercice 1.4 (*Règle de Leibniz)*. Si $f : U \to F$ et $g : U \to G$ sont différentiables et $B : F \times G \to H$ est bilinéaire, alors $B(f, g) : U \to H$ est différentiable. Donner sa dérivée.

On dit que $f : U \to E$ admet une dérivée en $x \in U$ *selon la direction* $h \in E$ si la fonction $t \to f(x + th)$ est dérivable en $t = 0$.

Exercice 1.5 (*Dérivée directionnelle)*. Si f est différentiable en x, pour tout $h \in E$, elle admet une dérivée en x selon $h \in E$. Cette dérivée vaut $Df(x)(h)$. Plus généralement calculer la dérivée de $t \to f(x(t))$ lorsque $x : I \to E$ est une courbe de classe C^1.

De nombreuses applications que l'on rencontre en algèbre linéaire sont différentiables.

Exercice 1.6 (*Norme euclidienne)*. Exprimer la différentielle de la norme d'un espace euclidien en fonction du produit scalaire.

Exercice 1.7 (*Différentielle de l'inversion)*. Soit $\mathrm{M}(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Montrer que le groupe $\mathrm{Gl}(n) \subset$

M(n) des matrices inversibles est un ouvert de M(n). Pourquoi l'application inverse

$$\mathrm{Gl}(n) \to \mathrm{Gl}(n), \qquad A \to A^{-1}$$

est-elle de classe C^1 ? On note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne. Calculer la dérivée de l'application

$$t \to (\mathrm{id} + tE_{ij})^{-1}$$

en $t = 0$. En déduire la différentielle de l'application inverse en l'identité, puis en toute matrice inversible. Reprendre ce calcul en dérivant la relation $AA^{-1} = \mathrm{id}$.

Exercice 1.8 (*Différentielle du déterminant)***.** Montrer que l'application déterminant

$$\mathrm{M}(n) \to \mathbb{R}, \qquad A \to \det A$$

est de classe C^1. Calculer sa différentielle en l'identité (procéder comme dans l'exercice précédent en dérivant $t \to \det(\mathrm{id} + tE_{ij})$). Calculer ensuite la différentielle en toute matrice inversible. Enfin montrer que Gl(n) est dense dans $M(n)$ puis calculer la différentielle de l'application déterminant sur M(n). Le résultat s'exprime facilement avec la matrice des cofacteurs.

Si F est l'espace vectoriel produit $F_1 \times ... \times F_k$, il découle facilement de la définition qu'une application f de U dans F est différentiable ssi ses applications coordonnées $f_i : U \to F_i$ le sont.

Le cas où la source E est un produit $E_1 \times ... \times E_k$ est plus délicat. Pour $i = 1, \ldots, k$, la dérivée partielle $D_i f$ de $f : U \to F$ est la dérivée de l'application partielle

$$x_i \to f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k),$$

les coordonnées $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$ étant fixes.

Théorème 1.1. *L'application $f : U \to F$ est de classe C^1 ssi elle admet des applications dérivées partielles*

$$D_i f : U \to \mathcal{L}(E_i, F), \qquad i = 1, \ldots, k$$

qui sont continues.

On munit E et F de bases, ce qui permet d'identifier E avec $\mathbb{R}^m$ et F avec $\mathbb{R}^n$. D'après ce qui précède, f est de classe C^1 ssi les applications coordonnées $f^1, \ldots, f^n$ de f admettent des dérivées partielles $\partial_j f^i$ continues $U \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.9 (Jacobienne et dérivées partielles)**.** Montrer que la matrice de la dérivée de f, la jacobienne, est

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) & \dots & \partial_m f^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n(x) & \dots & \partial_m f^n(x) \end{pmatrix}$$

Calculer les dérivées partielles d'une composée $g \circ f$.

Exercice 1.10 (Inégalité de la moyenne)**.** Si f est de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ et $[x, y]$ est un segment inclu dans U, montrer que

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y - x)).(y - x)\, dt$$

En déduire l'inégalité

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \|y - x\|_E \sup_{z \in [x,y]} \|f'(z)\|$$

qui vaut en fait seulement sous l'hypothèse f différentiable (ici, la norme de $f'(z)$ est la norme des formes linéaires de E associée à $\|\cdot\|_E$). Généraliser au cas où f prend ses valeurs dans un espace vectoriel F. On pourra se ramener au cas où $F = \mathbb{R}$ en appliquant le théorème de Hahn-Banach, selon lequel pour tout $y \in F$ il existe une forme linéaire de $\ell \in F^*$ de norme 1 telle que $\ell(y) = \|y\|$ (preuve facile en dimension finie).

Exercice 1.11 (Preuve du théorème 1.1)**.** Démontrer le théorème lorsque $E = E_1 \times E_2$ et $F = \mathbb{R}$. Pour la réciproque on écrira

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \\ =& f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) \\ =& \int_0^1 D_2 f(x_1 + h_1, x_2 + th_2).h_2\, dt + \int_0^1 D_1 f(x_1 + th_1, x_2).h_1\, dt \end{aligned}$$

d'après l'exercice 1.10. On montrera alors que la première intégrale vaut $D_2 f(x_1, x_2).h_2 + o(\|h_1\| + \|h_2\|)$ et la seconde $D_1 f(x_1, x_2).h_1 + o(\|h_1\| + \|h_2\|)$.

1.3 Théorème d'inversion locale

Si U et V sont deux ouverts d'espaces vectoriels, un difféomorphisme de U dans V est une bijection $U \to V$ de classe C^1 dont l'inverse est aussi de classe C^1.

Théorème 1.2 (Inversion locale)**.** *Soit U un ouvert de E, a un point de U et f une application $U \to F$ de classe C^1. On suppose que la dérivée de f en a est une application inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a (contenu dans U) tel que $W := f(V)$ soit un ouvert de F et la restriction de f à V soit un difféomorphisme de V sur W. Si de plus f est de classe C^k, alors la réciproque de $f|_V$ est de classe C^k.*

En corollaire, si $f : U \to F$ est injective et de classe C^1 avec une dérivée inversible en tout point, alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 1.12. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que c'est un difféomorphisme local sur le plan privé de l'origine. Déterminer un ouvert maximal U tel que la restriction de f à U soit un difféomorphisme global sur son image. Même question avec la fonction

$$g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

On pourra exprimer f et g en coordonnée complexe.

Exercice 1.13 (*Fonctions implicites*)**.** Enoncer le théorème des fonctions implicites et le déduire du théorème d'inversion locale.

Exercice 1.14 (*Racines des polynômes*)**.** Montrer que l'ensemble U des polynômes à coefficients réels de degré n admettant que des racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in U$, on note

$$\lambda_1(P) < \ldots < \lambda_n(P)$$

ses racines. Montrer que les fonctions $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1.

1.4 Dérivées d'ordre supérieur

Une application $f : U \to F$ est de classe C^2 si elle est différentiable et sa fonction dérivée $Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^1. La dérivée seconde en un point est une application linéaire $E \to \mathcal{L}(E, F)$. Elle s'identifie à une application bilinéaire $E \times E \to F$ par l'isomorphisme

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \to \mathcal{L}_2(E, F), \quad L \to \big((k, h) \to L(k)(h)\big)$$

Théorème 1.3 (théorème de Schwarz). *La dérivée seconde d'une fonction de classe C^2 est symétrique en tout point.*

On généralise cette définition par récurrence : l'application f est de classe C^{k+1} si elle de classe C^k et si sa dérivée k-ième est de classe C^1. Cette dérivée $D^{k+1}f$ est en tout point de U une application linéaire de

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_k(E, F)) \simeq \mathcal{L}_{k+1}(E, F).$$

Il découle alors du théorème précédent que la dérivée d'ordre k d'une application de classe C^k est symétrique, c'est à dire que

$$D^k f(x)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = D^k f(x)(h_1, \dots, h_k)$$

pour toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$.

On se convainc facilement que $f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k ssi ses applications coordonnées $f^1, \dots, f^n$ le sont. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et f de classe C^k, alors pour tout entier $\ell \leqslant k$ et tout indice $i_1, \dots, i_\ell$ de $\{1, \dots, m\}$ les dérivées partielles successives $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\ell} f^j$ existent, sont continues $U \to \mathbb{R}$ et égales à

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\ell} f^j(x) = D^k f^j(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_\ell})$$

avec pour $e_1, \dots, e_m$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Réciproquement, on déduit du théorème 1.1 que f est de classe C^k à la condition que toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

Exercice 1.15 (Dérivées partielles). Vérifier les formules

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} D^k f(x)(h, \dots, h) &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{m} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f)(x) h^{i_1} \dots h^{i_k} \\
&= \frac{1}{k!} \Big(\sum_{i=1}^{m} h^i \partial_i \Big)^k f(x) \\
&= \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha
\end{aligned}$$

où $h^1, \dots, h^m$ sont les coordonnées de h.

Exercice 1.16 (Formules de Taylor). De la formule de Taylor avec reste intégral pour $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^{k+1}

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \dots + \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1 - t)^k g^{(k+1)}(t) \, dt$$

déduire que

$$\begin{aligned} f(x+h) =& f(x) + Df(x)(h) + \ldots + \frac{1}{k!} D^k f(x)(h,\ldots,h) \\ &+ \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k D^{k+1} f(x+th)(h,\ldots,h)\, dt \end{aligned}$$

si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^{k+1} et le segment $[x, x+h]$ est inclu dans U. Vérifier que le reste est $O(\|h\|^{k+1})$.

Exercice 1.17 (Différences)**.** Si f est une fonction $U \to F$, on définit la différence de f par $\Delta_v f(x) = f(x+v) - f(x)$. Vérifier que

$$\begin{aligned} \Delta_{v_1} \ldots \Delta_{v_k} f(x) &= \sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k=0}^{1} (-1)^{k+\epsilon_1+\ldots+\epsilon_k} f(x + \epsilon_1 v_1 + \ldots + \epsilon_k v_k) \\ &= \sum_{A\subset\{1,\ldots,k\}} (-1)^{k+|A|} f\big(x + \textstyle\sum_{i\in A} v_i\big) \end{aligned}$$

et en déduire que $\Delta_{v_1} \ldots \Delta_{v_k} f(x)$ est symétrique par rapport à $v_1, \ldots, v_k$.

Exercice 1.18 (Preuve du théorème de Schwarz)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Justifier le calcul suivant

$$\begin{aligned} \Delta_v \Delta_w f(x) &= \int_0^1 \big(Df(x+v+tw) - Df(x+tw)\big)(w)dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 D^2 f(x+sv+tw)(v,w)\, dsdt \\ &= D^2 f(x)(v,w) + o((\|v\| + \|w\|)^2) \end{aligned}$$

On déduit alors le résultat du fait que $\Delta_v \Delta_w f$ est symétrique par rapport à v et w.

Exercice 1.19 (Polynômes et applications multilinéaires symétriques)**.** Un polynôme homogène de degré k est une application $E \to F$ de la forme

$$P(v) = L(v,\ldots,v), \qquad L \in \mathcal{L}_k(E,F).$$

Montrer que l'application qui à L associe P est un isomorphisme de l'espace $\mathcal{S}_k(E,F) \subset \mathcal{L}_k(E,F)$ des applications multilinéaires symétriques sur l'espace des polynômes homogéne de degré k. On montrera que si L est symétrique, alors $L(v_1,\ldots,v_k) = \Delta_{v_1} \ldots \Delta_{v_k} P(x)$.

1.5 Références bibliographiques

Pour des rappels de cours et de nombreux exercices :

– François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Enseignement des Mathématiques (Cassini). 4. Paris : Cassini. xvi, 399 p., 1999. Ens : 67 Rou, Rec : 44 Rou

On trouvera des preuves complètes et bien exposées dans la première partie du livre de Cartan

– Henri Cartan. *Cours de calcul différentiel. Nouv. éd., ref. corr. (Nouv. tirage).* Collection Méthodes. Mathématique. Paris : Hermann. 364 p. , 1985

et dans le livre de Lang, chapitres 13 et 14 :

– Serge Lang. *Real and functional analysis. 3. ed.* Graduate Texts in Mathematics. 142. New York : Springer-Verlag. xiv, 580 p. , 1993

Les preuves présentées ici des théorèmes 1.1, 1.3 et de l'inégalité de la moyenne 1.10 sont extraites du livre de Lang. Le cadre de ces ouvrages dépasse celui du cours : nous aurons seulement besoin du calcul différentiel dans les espaces de dimension finie et pas dans les espaces de Banach.