1 Calcul différentiel

Exercice 1.1 (*Différentielle de l'inversion)***.** Soit $\mathrm{M}(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Montrer que le groupe $\mathrm{Gl}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathrm{M}(n)$. Pourquoi l'application inverse

$$\mathrm{Gl}(n) \to \mathrm{Gl}(n), \qquad A \to A^{-1}$$

est-elle de classe C^1 ? On note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne. Calculer la dérivée de l'application

$$t \to (\mathrm{id} + tE_{ij})^{-1}$$

en $t = 0$. En déduire la différentielle de l'application inverse en l'identité, puis en toute matrice inversible. Reprendre ce calcul en dérivant la relation $AA^{-1} = \mathrm{id}$.

Exercice 1.2 (*Différentielle du déterminant)***.** Montrer que l'application déterminant

$$\mathrm{M}(n) \to \mathbb{R}, \qquad A \to \det A$$

est de classe C^1. Calculer sa différentielle en l'identité (procéder comme dans l'exercice précédent en dérivant $t \to \det(\mathrm{id} + tE_{ij})$). Calculer ensuite la différentielle en toute matrice inversible. Enfin montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est dense dans $M(n)$ puis calculer la différentielle de l'application déterminant sur $\mathrm{M}(n)$. Le résultat s'exprime facilement avec la matrice des cofacteurs.

Exercice 1.3. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que c'est un difféomorphisme local sur le plan privé de l'origine. Déterminer un ouvert maximal U tel que la restriction de f à U soit un difféomorphisme global sur son image. Même question avec la fonction

$$g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

On pourra exprimer f et g en coordonnée complexe.

Exercice 1.4 (*Racines des polynômes)***.** Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Montrer que la partie U de $\mathbb{R}_n[X]$ formée des polynômes admettant n racines simples est un ouvert. Si $P \in U$, on note

$$\lambda_1(P) < \ldots < \lambda_n(P)$$

ses racines. Montrer que les fonctions $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1. On commencera par traiter les cas $n = 1, 2$. Pour le cas général on appliquera le théorème des fonctions implicites.

Exercice 1.5 (*Racines des polynômes (2))***.** Calculer les dérivées partielles de l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui envoie $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, a)$ sur le polynôme

$$a(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n).$$

En déduire une autre preuve de l'exercice précédent.

Exercice 1.6 (*Valeurs propres et vecteurs propres)***.** Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Soit $A_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et X_0 un vecteur propre de A_0 dont la valeur propre est une racine simple du polynôme caractéristique. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 et une application $X : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que pour $A \in V$, $X(A)$ est un vecteur propre de A et $X(A_0) = X_0$.

A Références bibliographiques

Des livres sur l'ensemble du cours qui comportent de nombreux exercices :

- Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Collection Grenoble Sciences. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble. 299 p., 1996. Ens : 67 Laf
- Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle. Maitrise de mathématiques.* Collection U/Série "Mathématiques". Paris : Librairie Armand Colin. 384 p., 1972. Rec : 67 Ber
- Alain Hénaut and Alain Yger. *Éléments de géométrie.* Ellipses, 2004
- Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I. 2nd ed.* Berkeley, California : Publish Perish, Inc. XIII, 668 p. , 1979

Les feuilles d'exercices ainsi que des corrections sont aussi disponibles sur la page web :

- `http://www.institut.math.jussieu.fr/~charles/MM022/`