2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 2.1 (*Sphère comme une sous-variété*)**.**

1) Pour $i = 0, 1, 2$, vérifier que les fonctions $1 - |x|^2$, x_j, $j \neq i$, forment un système de coordonnées sur les domaines $U_i^{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^3 / \ \pm x_i > 0\}$. En déduire que la sphère est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner les valeurs critiques de la fonction $x \to |x|^2$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire à nouveau que la sphère est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.2 (*Le tore de révolution*)**.** On suppose $R > r > 0$.

1) Représenter la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

2) Montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.3 (*Le double puits et le tore à deux trous*)**.**

1) Représenter la partie de $\mathbb{R}^2 \ni (x, \xi)$ définie par l'équation

$$\xi^2 + V(x) = E$$

où E est un paramètre réel et $V(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ est un potentiel qui présente un double puits. Lorsque $E = 0$, on pourra utiliser le paramétrage $(x, \xi) = (\cos\theta, \sin 2\theta)$. Pour quelle valeur de E est-ce une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

2) Montrer que la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$(4x^2(x^2 - 1) + y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Tracer les sections par les plans horizontaux et en déduire que cette sous-variété est un tore à deux trous.

Exercice 2.4 (*Tore à g trous*)**.** Soit un entier naturel g et les disques $D = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ et D_1, ..., D_g donnés par

$$D_i = \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leqslant r_i^2\}$$

On suppose que les D_i sont deux à deux disjoints et que $\operatorname{int} D_i \subset D$. Soit la fonction

$$f(x, y) = \big(R^2 - (x^2 + y^2)\big) \prod_{i=1}^{g} \big((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2\big).$$

Montrer que $M = \{z^2 = f(x, y)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, compacte et connexe. La représenter.

Commentaire. D'après le théorème de classification des surfaces, toute variété compacte sans bord de dimension 2 orientable et connexe est difféomorphe à un tore à g trous. Deux tels tores sont difféomorphes ssi ils ont autant de trous. g s'appelle le genre de la surface. $\square$

Exercice 2.5 (*Contre-exemples à un critère bien utile)*.

Soient X, Y des espaces métriques et f une application continue de X dans Y. f est dite propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.

1) Montrer que f est propre ssi de toute suite (x_n) de X telle que $(f(x_n))$ converge on peut extraire une suite convergente.

2) Montrer que si f est propre elle est fermée. Par conséquent, une application continue, propre et injective dans des espaces métriques est un homéomorphisme sur son image.

3) Soit M, N deux variétés et $f : M \to N$ une application C^∞. D'après ce qui précède, si f est immersive, injective et propre alors c'est un plongement. Donner des contre-exemples à cette implication si l'on omet une des trois propriétés "immersive ", "injective " ou "propre ".

Exercice 2.6 (*Théorème de Kronecker et droite de pente irrationnelle)*.

1) Montrer qu'un sous-groupe du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ engendré par un élément et de cardinal infini est dense.

2) Soit α un nombre irrationnel. Montrer que l'application j de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$ qui envoie t sur $(\cos t, \sin t, \cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$ est une immersion injective.

3) Quelle est l'adhérence de l'image de j ? En déduire que l'image de j n'est pas une sous-variété.

4) Que se passe-t-il pour α rationnel ?

Exercice 2.7 (*Partie localement fermée)*. On rappelle qu'une partie E d'un espace topologique X est localement fermée si tout point de E admet un voisinage V tel que $V \cap E = V \cap F$ avec F un fermé.

1) Vérifier qu'une sous-variété est une partie localement fermée.

2) Vérifier qu'une partie E est localement fermée ssi elle est intersection d'un ouvert et d'un fermé ssi elle est intersection de son adhérence et d'un ouvert.