4 Champs de vecteurs

Exercice 4.1 (*Exemples de flots non-globaux)*. Considérons les champs de vecteurs de $\mathbb{R}$

$$X_n = ax^n \partial_x, \qquad n = 0, 1, 2, 3,$$

où a est un paramètre réel non-nul.

a) Pour chaque valeur de n, calculer les courbes intégrales de X_n et les représenter. Donner l'intervalle de vie de tout $x \in \mathbb{R}$. Expliciter l'ensemble de définition du flot au temps t. Décrire le portrait des phases, c'est-à-dire la partition de $\mathbb{R}$ en les trajectoires (cf. exercice suivant).

b) Montrer que pour $n = 0, 1, 2$, le champ X_n se prolonge à la droite projective en un champ Y_n et reprendre la question précédente avec Y_n.

Exercice 4.2 (*Portrait de phases)*. Soit un champ de vecteur X d'une variété M. On appelle orbite de $x \in M$ ou trajectoire passant par x l'ensemble

$$\{u_x(t) / \ t \in I_x\}$$

où (I_x, u_x) est l'arc intégral maximal de X d'origine x. Montrer les faits suivants :

a) deux trajectoires sont ou bien disjointes ou bien confondues ;

b) chaque trajectoire est ou bien un point, un cercle plongé, ou une droite réelle immergée ; plus précisément, si (I, u) est un arc intégral maximal, alors ou bien u est constante et $I = \mathbb{R}$, ou bien u est une immersion injective ou bien $I = \mathbb{R}$ et il existe $T \neq 0$ tel que u se factorise en un plongement $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to M$.

c) si $(]a, \infty[, u)$ est une courbe intégrale telle que $u(t) \to u_\infty$ quand $t \to \infty$, alors u_∞ est un zéro de X.

d) Décrire les portraits de phase possibles lorsque M est la droite réelle ou bien le cercle.

Exercice 4.3 (*Quelques calculs dans le plan et la sphère)*.

a) Intégrer les champs de vecteurs $a\partial_x + b\partial_y$ où a et b sont des paramètres réels, $x\partial_x + y\partial_y$ et $y\partial_x - x\partial_y$.

b) On rappelle que les champs constants du plan ainsi que le champ d'Euler se prolonge à la sphère. Donner leur flot.

c) Donner une méthode générale pour intégrer les champs linéaires du plan.

Exercice 4.4 (*Intégrale première)*. Soit un champ de vecteurs X d'une variété M.

a) Montrer qu'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est constante le long des courbes intégrales de X si et seulement si $X.f$ est nulle. Une telle fonction s'appelle une *intégrale première* du champ.

b) Donner des exemples d'un telle situation avec les champs de vecteurs du plan de l'exercice 4.3.

c) Montrer qu'un champ admettant une intégrale première propre est complet. Comme application, montrer que si la fonction $E(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$ est propre, alors toute solution de $\ddot{x} = -\nabla V(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5 (*Champs et sous-variétés)***.** Soit une variété M, un sous-variété N. Considérons un champ X de M tangent à M, c'est à dire que pour tout $x \in N$, $X(x) \in T_xN$.

a) Montrer que X définit par restriction un champ Y de N tel que pour toute courbe (I,u) de N, (I,u) est une courbe intégrale de X ssi c'est une courbe intégrale de Y.

b) Supposons que N soit fermée dans M. Soit (I,u) une courbe intégrale de Y telle qu'il existe $t_0 \in I$ pour lequel $u(t_0) \in N$. Montrer alors que $u(I) \subset N$.

c) A tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, on associe le champ de vecteurs $X_v(x) = (x, v \times x)$ de $\mathbb{R}^3$, où "$\times$" désigne le produit vectoriel. Montrer qu'il est tangent à la sphère et donner son flot.

Exercice 4.6 (*Champs du tore)***.** On dit qu'une application $\Phi : M \to N$ entrelace le champ X de M avec le champ Y de N si

$$Y(\Phi(x)) = T_x\Phi(X(x)), \quad \forall x \in M.$$

Montrer que pour tout champ X de $\mathbb{R}^2$ invariant par translation entière, il existe un champ Y du tore tel que la projection canonique entrelace X avec Y. Appliquer ceci aux champs constants et décrire les courbes intégrales des champs ainsi définis sur le tore.

Exercice 4.7 (*Groupe de difféomorphismes à un paramètre)***.** Soit une application $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^∞ telle que

$$\varphi(0,x) = x, \qquad \varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$$

pour tous réels t, s et $x \in M$. Montrer que le flot du champ de vecteurs

$$X(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t,x)$$

est la famille $(\varphi(t,\cdot))_t$.

Exercice 4.8 (*Crochet de Lie et flot)*. Soient deux champs de vecteurs X, Y d'une variété M que l'on suppose complets. On note $(\varphi_t)_t$ et $(\psi_s)_s$ les flots de X et Y.

a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que le crochet $[X, Y]$ est nul si et seulement si

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

pour tous s et t dans $]-\epsilon, \epsilon[$.

b) Soit une courbe $\gamma : I \to M$ telle que $\gamma'(t_0) = 0$. Montrer alors qu'il existe un vecteur $\xi \in T_x M$ tel que pour toute carte $(U, \Phi, \mathbb{R}^n)$ de M

$$(\Phi \circ \gamma)''(t_0) = (T_{\gamma(t_0)}\Phi)(\xi)$$

On appelle alors ξ la dérivée seconde de γ en t_0.

c) Soit $x \in M$. Montrer que la courbe $\gamma(t) = \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(x)$ a une dérivée nulle en $t = 0$ et que

$$\gamma''(0) = 2[X, Y](x).$$