Examen de géométrie différentielle du 19 Décembre 2012, correction

Exercice 1.

a) T_pS est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à la droite $\mathbb{R}p$. Au moins une coordonnée de p ne s'annule pas. Si $z(p) \neq 0$, alors les vecteurs $(0, z(p), -y(p))$ et $(z(p), 0, -x(p))$ forment une base de T_pS. En permutant les coordonnées, on obtient une base lorsque $x(p) \neq 0$ ou $y(p) \neq 0$.

b) p est un point critique de f si $d_pf : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est nulle, un point critique de g si la restriction de d_pf à T_pS est nulle.

c) Comme $df = xdy + ydx$, le noyau de d_pf est l'orthogonal de $(y, x, 0)$. Donc p est un point critique de g ssi $(y, x, 0)$ appartient à $(x, y, z)\mathbb{R}$, cela se produit pour $p = (0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0)$. g atteint son maximum et son minimum en un de ses point critiques, par conséquent le maximum est $1/2$ est le minimum $-1/2$.

d) L'application de S sur $\mathbb{R}^2$ qui envoie (x, y, z) sur (x, y), se restreint en un homéomorphisme de l'hemisphère nord $S \cap \{z \geqslant 0\}$ (resp. l'hémisphère sud $S \cap \{z \leqslant 0\}$) sur le disque unité D de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent il suffit de représenter les ensembles de niveaux de la fonction xy de $\mathbb{R}^2$ restreinte au disque unité.

e) Pour $c > 1/2$ ou $c < -1/2$, l'ensemble de niveau $g^{-1}(c)$ est vide. Pour $c = 1/2$ ou $c = -1/2$, $g^{-1}(c)$ se compose de deux points, donc a deux composantes connexes. Pour $0 < c < 1/2$ et $-1/2 < c < 0$, $g^{-1}(c)$ est la réunion disjointe de deux cercles, donc a deux composantes connexes. Enfin $g^{-1}(c)$ est la réunion de deux grands cercles de S qui s'intersectent aux poles nord et sud, donc a une seule composante connexe.

Exercice 2.

a) D'après le cours $[\mathcal{L}_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$, d'où le résultat.

b) D'après la formule de Cartan, $\mathcal{L}_X\alpha = \iota_X d\alpha + d\iota_X\alpha = \iota_X d\alpha + d\alpha(X)$. donc $(\mathcal{L}_X\alpha)(Y) = d\alpha(X, Y) + \mathcal{L}_Y(\alpha(X))$. Le résultat découle maintenant du a).

c) M étant de dimension 2, $\wedge^2(T_p^*M)$ est une droite et $(\alpha \wedge \beta)|_p$ en est une base. Donc il existe une fonction $h : M \to \mathbb{R}$ telle $d\alpha = h\alpha \wedge \beta$. Comme $(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X) = 1$, on a $h = d\alpha(X, Y)$. Et d'après le b), $d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y]) = -f\alpha(X) - f\alpha(Y) = -f$. La deuxième formule se montre de la même façon.

d) La preuve est similaire, il faut utiliser que la famille $(\alpha_i \wedge \alpha_j)|_p$, $i<j$ est une base $\wedge^2(T_p^*M)$. De plus si $i<j$ et $k<\ell$, alors

$$(\alpha_i \wedge \alpha_j)(X_k, X_\ell) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=k \text{ et } j=\ell \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc on a $d\alpha_k = \sum_{i<j} e_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j$ avec $e_{ij}^k = d\alpha_k(X_i, X_j) = -\alpha_k([X_i, X_j]) = -c_{ij}^k$.

Exercice 3.

a) Soit (U, φ) une carte de M centrée en p. $\varphi(U)$ étant un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$, il existe $\epsilon > 0$ telle que la boule $B_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ centrée à l'origine de rayon ϵ est incluse dans $\varphi(U)$. Alors B_1 est homéomorphe à B_ϵ, qui est homéomorphe à $B := \varphi^{-1}(B_\epsilon)$.

$B \setminus \{p\}$ a le même type d'homotopie que la sphère de dimension $n-1$, donc ses espaces de cohomologie sont isomorphes à ceux de S^{n-1}.

b) Pour toute variété N, $H^0(N)$ est l'espace des fonctions localement constantes de N. De plus l'application $j^* : H^0(M) \to H^0(M \setminus \{p\})$ est la restriction de M à $M \setminus \{p\}$. j^* est injective, car la dimension étant $\geqslant 1$, p n'est pas isolé, et donc si $f \in H^0(M)$ s'annule sur un voisinage de p privé de p, elle s'annule nécessairement en p. Montrons que j^* est surjective si $n \geqslant 2$. p admet un voisinage B homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. La dimension étant $\geqslant 2$, $B \setminus \{p\}$ est connexe. Donc toute fonction $f \in H^0(M \setminus \{p\})$ est constante sur $B \setminus \{p\}$. En prolongeant f en p de sorte à ce qu'elle soit constante sur B, on obtient une fonction localement constante sur M.

En dimension 1, on a vu que j^* est injective. Selon les cas, elle peut être surjective ou non. Par exemple, pour $M = S^1$, j^* est un isomorphisme, tandis que pour $M =]0,1[$, j^* n'est pas surjective.

c) On une suite exacte (extraite de la suite longue de Mayer-Vietoris)

$$H^{k-1}(B \setminus \{p\}) \to H^k(M) \to H^k(M \setminus \{p\}) \oplus H^k(B) \to H^k(B \setminus \{p\})$$

Pour $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $H^{k-1}(B \setminus \{p\})$, $H^k(B)$ et $H^k(B \setminus \{p\})$ sont réduits à 0. Donc, l'application $H^k(M) \to H^k(M \setminus \{p\})$ est un isomorphisme, et il s'agit de l'application j^*. Lorsque $k=1$, $H^k(B)$ et $H^k(B \setminus \{p\})$ sont réduits à 0. De plus l'application $H^{k-1}(B \setminus \{p\} \to H^k(M)$ est nulle. En effet son noyau est l'image de l'application

$$H^0(M \setminus \{p\}) \oplus H^0(B) \to H^0(B \setminus \{p\})$$

qui est surjective dès que la dimension est $\geqslant 2$. On conclut alors comme précédement que $j^*H^k(M) \to H^k(M \setminus \{p\})$ est un isomorphisme.

d) Si $M = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère de dimension $n-1$, donc $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{R}$. Comme $H^{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$ si $n \geqslant 2$, l'application j^* n'est pas un isomorphisme en degré $n-1$.

Si M est la sphère de dimension n, alors $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$. De plus, M privé d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc $H^n(M \setminus \{p\}) = 0$. Par conséquent, j^* n'est pas un isomorphisme en degré n.