Fonctions holomorphe de plusieurs variables :

Ω ouvert de $\mathbb{C}^n$, on note $z_1, \dots, z_n$ les coordonnées linéaires de $\mathbb{C}^n$ et x_i, y_i la partie réelle et imaginaire de z_i.

$f \in C^1(\Omega)$ est dite holomorphe si f vérifie les équations de Cauchy-Riemann :
Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$ où $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$

L'ensemble des fonctions holomorphes de Ω est noté $\mathcal{O}(\Omega)$, c'est un anneau.

Rappel : si Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et K est un compact à bord C^1 contenu dans Ω, alors $\forall z \in \operatorname{int} K$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$

Preuve : appliquer la formule de Stokes à $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$ sur $K \setminus \{|\zeta - z| < \varepsilon\}$ et faire tendre ε vers 0.

C'est la formule de Cauchy, qui implique que toute fonction holomorphe est localement développable en série entière. Cela se généralise à plusieurs variables comme suit. On appelle polydisque de $\mathbb{C}^n$ tout ensemble D de la forme $D = D_1 \times \dots \times D_n$ où les D_i sont des disques de $\mathbb{C}$. Remarquons que (D est ouvert $\Leftrightarrow$ les D_i sont ouverts) et (D fermé $\Leftrightarrow$ les D_i sont fermés)

On appelle $\partial_0 D = (\partial D_1) \times \dots \times (\partial D_n)$ le bord distingué de D.

Théorème : Si D est un polydisque ouvert d'adhérence contenue dans Ω alors pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n .$$

Preuve : appliquer la formule de Cauchy en chacune des variables.

Conséquence : toute fonction holomorphe est $\mathbb{C}$-analytique.
Plus précisément, si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $D = \{z \mid |z_i| < r_i\}$ est tq $\bar{D} \subset \Omega$, alors $f(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$ sur D pour une famille $(a_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n)$ vérifiant $|a_\alpha| \leq M r^{-\alpha}$ où $M = \sup_{\partial_0 D} |f|$

Donc la série et ses dérivées successives convergent normalement sur tout compact de D et $a_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Preuve : $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta} \sum_0^\infty \frac{z^n}{\zeta^n}$ avec convergence normale sur $K \times \{|\zeta| = r\}$ pour tout compact K de $\{z \mid |z| < r\}$.

Donc $\frac{f(\zeta)}{(\zeta_n - z_n) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta_n \cdots \zeta_n} \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\zeta^\alpha}$ avec convergence normale

sur $K \times \partial_0 D$ pour tout compact K de D

Donc $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ avec $a_\alpha = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\partial_0 D} \frac{f(\zeta)}{\zeta^\alpha} \frac{d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{\zeta_n \cdots \zeta_n}$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0,2\pi]^n} \frac{f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})}{r^\alpha e^{i\theta \cdot \alpha}} \, d\theta_1 \cdots d\theta_n$$

d'où le résultat.

Remarque : dans le théorème et sa conséquence, on a seulement utilisé que f est holomorphe par rapport à chaque variable les autres étant fixées et que f est localement bornée.

D'après un théorème d'Hartogs, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall u \in \mathbb{C}^{n-1}$, $z \longrightarrow f(u_1, \dots, u_{i-1}, z, u_i, \dots, u_n)$ est holomorphe, est holomorphe.
La preuve est dans le livre d'Hörmander, théo 2.2.8.

Principe du prolongement analytique :
si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et Ω connexe alors $f \equiv 0 \Leftrightarrow \exists p \in \Omega$ tq $\partial^\alpha f(p) = 0, \forall \alpha$
$\Leftrightarrow$ f est identiquement nulle dans un ouvert non vide de Ω

Preuve : conséquence de ce qui précède

Principe du maximum : Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $|f|$ atteint son maximum en $p \in \Omega$ avec Ω connexe, alors f est constante.

Preuve : se déduit du même résultat pour $n = 1$ en se restreignant aux droites complexes contenant p.