Plongements d'une variété dans un espace vectoriel

M variété, V espace vectoriel de dimension finie
Si M est compacte, une application φ de M dans V est un plongement si elle est injective et immersive. Analysons cette condition.

Soit $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$. Quitte à remplacer $\mathbb{R}^N$ par le sous-espace engendré par $\varphi(M)$, on peut supposer que $\varphi(M)$ n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathbb{R}^N$, autrement dit les coordonnées $f_1, \dots, f_N$ de φ forment une famille libre de $C^\infty(M, \mathbb{R})$

De manière plus intrinsèque, soit E le sous-espace de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ engendré par $f_1 \dots f_N$
Alors on peut voir φ comme l'application de M dans E^* qui envoie x sur λ_x tel que $\lambda_x(f) = f(x)$. En effet, les coordonnées de $\lambda_x(f)$ dans la base duale de $(f_1, \dots, f_N)$ sont $(\lambda_x(f_1), \dots, \lambda_x(f_N)) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$.

Prop : φ est injective $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in M$, $x \neq y \Rightarrow \exists f \in E$ tel que $f(x) \neq f(y)$
— immersive $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$, $\forall \xi \neq \eta \in T_x M$, $\exists f \in E$ tq $d_x f(\xi) \neq d_x f(\eta)$.
$(\Leftrightarrow \forall x \in M$, $(d_x f \,;\, f \in E)$ engendre $T_x^* M)$

Preuve : $\lambda_x \neq \lambda_y$ signifie qu'il existe $f \in E$ / $\lambda_x(f) \neq \lambda_y(f)$, i.e. $f(x) \neq f(y)$.
φ immersive en $x \Leftrightarrow T_x\varphi : T_x M \to \mathbb{R}^N$, $\xi \mapsto (d_x f_i(\xi))_i$ injective.

Donc pour que φ soit un plongement, il faut que E soit suffisamment gros de sorte à séparer les points et les vecteurs tangents.

Plongement holomorphe d'une variété complexe compacte dans un projectif

Adaptons ce qui précède au cas d'une variété complexe compacte et d'une application φ holomorphe. Si $\dim \Gamma \geq 1$, les seules fonctions holomorphes de M sont les fonctions localement constantes, problème ! Remplaçons les fonctions de M par les sections d'un fibré en droites $L \to M$ holomorphe.

Soit E un sous-espace de $\mathcal{O}(M,L)$ de dimension finie.
Soit $s_0, \dots, s_N$ une base de E et soit σ un repère holomorphe local sur U
Alors on a une application $U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$, $x \longrightarrow (f_0(x), \dots, f_N(x))$ où $s_i(x) = f_i(x)\sigma(x)$
Pour un autre repère σ' sur U, on a $\sigma = g\sigma'$ avec $g \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^*)$ et donc une application $U \to \mathbb{C}^{N+1}$, $x \longrightarrow (g(x)f_0(x), \dots, g(x)f_N(x))$
L'application $U \to \mathbb{P}^N$, $x \longrightarrow [f_0(x) : \dots : f_N(x)]$ ne dépend pas du choix du repère
Elle est clairement holomorphe.
On note $[f_0(x) : \dots : f_N(x)] = [s_0(x) : \dots : s_N(x)]$. Attention, l'application n'est pas définie aux points x tels que $s_0(x) = \dots = s_N(x) = 0$.

Vocabulaire : un sous-espace de $\mathcal{O}(M,L)$ s'appelle un système linéaire de L, il est dit complet si $E = \mathcal{O}(M,L)$, auquel cas on note $E = |L|$
Un point $x \in M$ est un point base du système linéaire E si $s(x) = 0$, $\forall s \in E$. Le lieu de base de E est l'ensemble des points de base de E, on le note $Bs(E)$.
L est dit globalement engendré si le lieu de base de $|L|$ est vide, i.e. si $\forall x \in M$, $\exists\, s \in \mathcal{O}(M,L)$ telle que $s(x) \neq 0$.

D'après ce qui précède, si on choisit une base $(s_0, \dots, s_N)$ de E, on obtient une application holomorphe $M \setminus Bs(E) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^N$. Présentons cette application plus intrinsèquement.

Notons que $\mathbb{P}(E^*) = \{$ droites vectorielles de $E^* \} = \{$ hyperplans (vectoriels) de $E \}$
Alors Φ est l'application de M dans $\mathbb{P}(E^*)$ qui envoie x sur $\{ s \in E \,/\, s(x) = 0 \} = H_x$

Preuve : la base (s_i) fournit une identification $E^* \to \mathbb{C}^N$, $\lambda \mapsto (\lambda(s_0), \dots, \lambda(s_N))$
$\Phi(x) = \left[\frac{s_0(x)}{\sigma(x)} : \dots : \frac{s_N(x)}{\sigma(x)} \right] = \left[\lambda(s_0) : \dots : \lambda(s_N) \right]$ si $\lambda \in E^*$ est définie par $\lambda(s) = \frac{s(x)}{\sigma(x)}$. Le noyau de λ est H_x.

Prop : Soit E un système linéaire de L et $\varphi : M \setminus Bs(E) \to \mathbb{P}(E^*)$ l'application associée. Alors

φ est injective $\Leftrightarrow \forall x, y \in \Pi \setminus Bs(E)$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, s \in E$ tq $s(x) \neq 0$ et $s(y) = 0$

φ est une immersion en $x \Leftrightarrow \forall x \in \Pi$, $\forall z \neq y \in T_x \Pi$, $\exists\, s \in E$ tq $s(x) = 0$ et $d_x s(z) \neq d_x s(y)$

($\Leftrightarrow$ la famille $\{ d_x s \,/\, s \in E$ et $s(x) = 0 \}$ engendre $T^*_x \Pi \otimes L_x$)

Dans cet énoncé, $d_x s$ est défini comme suit : soit σ un repère de L au voisinage de x, $s = f \sigma$ alors $d_x s = d_x f \otimes \sigma(x)$
Cette définition ne dépend pas du choix du repère car $f(x) = 0$.

Preuve : pour l'injectivité, comme H_x et H_y sont des hyperplans

$H_x \neq H_y \iff H_x \not\subset H_y \iff H_y \not\subset H_x$.

pour la seconde assertion, on choisit $s_0 \in E$ tq $s_0(x) \neq 0$

Soit $(s_1, \dots, s_N)$ une base de l'hyperplan H_x. Alors $(s_0, \dots, s_N)$ est une base de E

L'application φ s'écrit dans la carte associée :

$$x \longrightarrow \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_N(x)}{s_0(x)} \right) \quad \text{et} \quad d_x s_i = d_x \left(\frac{s_i}{s_0} \right) \otimes s_0(x) .$$

si M est compacte, E est un système linéaire sans point base et φ est injective et immersive, alors φ est un plongement de M dans $\mathbb{P}(E^*)$

Dans ce cas on dit que le fibré L est très ample.

Le fibré L est dit ample si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que L^k est très ample.

Théorème de Kodaira : Soit M variété complexe compacte et $L \to M$ fibré en droite holomorphe. Supposons que L admette une métrique qui la rende positive, alors L est ample.

Preuve la dernière semaine.

Il est facile de voir que la condition est nécessaire, voir la prop suivante.

Exercice : si L est très ample, L^ℓ est très ample

Si $L \to M$, $L' \to M'$ sont très amples, $L \boxtimes L'$ est très ample

Si $L \to M$ est très ample et N est une sous variété de M, $L_{|N}$ est très ample.

Exercice : Segre, Veronese, Plücker.

Prop : soit $E \subset \mathcal{O}(M, L)$ un système linéaire, $X = M \setminus Bs(E)$ et $\varphi : X \to \mathbb{P}(E^*)$ l'application associée. Alors $\varphi^* L_{\mathbb{P}(E^*)} = L$ où $L_{\mathbb{P}(E^*)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^*)}(1)$.

Preuve : remarquons que $L^{-1}_{\mathbb{P}(E^*)} = \{ (H, l) \in \mathbb{P}(E^*) \times E^* \,/\, H \subset \ker l \}$

On a une application naturelle de L^{-1} dans $L^{-1}_{\mathbb{P}(E^*)}$: à $\lambda \in L^*_x$ on associe l'application linéaire $E \to \mathbb{C}$, $s \to \lambda(s(x))$.

Cette application relève φ, et un isomorphisme dans chaque fibre.

Ainsi $\varphi^* L^{-1}_{\mathbb{P}(E^*)} = L^{-1}$ et donc $\varphi^* L_{\mathbb{P}(E^*)} = L$.

Remarque : On a utilisé dans la preuve le fait suivant :

Si $K \to N$ et $L \to M$ sont deux fibrés et $f : N \to M$ une application, alors un isomorphisme $f^* L \simeq K$ est la même chose qu'une application $\tilde{f} : K \to L$ telle que $\forall x \in N$, $\tilde{f}(K_x) \subset L_{f(x)}$ et l'application induite par restriction de K_x dans $L_{f(x)}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Conséquence : si L est très ample, il admet une métrique qui le rend positif. C'est aussi vrai pour L très ample, ce qui montre la réciproque du théorème de plongement de Kodaira.

Remarque : réciproquement, partons de $\varphi : X \to \mathbb{P}(V)$ holomorphe.
quitte à remplacer V par un sous-espace, l'image de φ n'est contenue dans aucun hyperplan. Soit $L = \varphi^* L_{\mathbb{P}(V)}$ et $\varphi^* : V^* = \Gamma(\mathbb{P}(V), L_{\mathbb{P}(V)}) \to \Gamma(X, L)$ l'application qui envoie s sur $s \circ \varphi$. Alors φ^* est injective et si E est le système linéaire $\varphi^*(V^*)$, l'application φ s'identifie à $X \to \mathbb{P}(E^*)$, $x \to H_x$. exercice : le vérifier !

Cela montre aussi qu'une variété projective admet un fibré en droite ample.