Connexions et classes de Chern

Soit M une variété et $L \to M$ un fibré en droites complexes.

Def: une connexion de L est une application linéaire $\nabla : \Gamma(M,L) \to \Omega^1(M,L)$ qui vérifie : $\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s \quad \forall f \in C^\infty(M)$ et $s \in \Gamma(M,L)$.

On dit que ∇ préserve une métrique h de L si $\forall s_1, s_2 \in \Gamma(M,L)$,

$d\, h(s_1, s_2) = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)$.

Fait: toute connexion ∇ de L est locale. Pour tout ouvert U de M, $\nabla_{|U}$ est une connexion (que l'on note à nouveau ∇).

Preuve: soit $s \in \Gamma(M,L)$ et $x \notin \operatorname{Supp} s$. Soit $\varphi \in C^\infty(M)$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage de x et $s \equiv 0$ sur le support de φ. Alors $\varphi s = 0$ entraine que $0 = \nabla(\varphi s) = d\varphi \otimes s + \varphi \nabla s = \varphi \nabla s \Rightarrow \nabla s$ nulle au voisinage de x.

Soit (U, σ) un repère de L et ∇ une connexion de L.

Alors $\nabla \sigma = \alpha \otimes \sigma$ pour un certain $\alpha \in \Omega^1(U)$ et donc $\forall f \in C^\infty(U)$,

$\nabla(f\sigma) = (df + \alpha f) \otimes \sigma$.

De plus, si ∇ préserve une métrique h de L et $h(\sigma,\sigma) = 1$, alors $i\alpha \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$.

Prop: Tout fibré en droites complexes $L \to M$ admet une connexion.

Si ∇, ∇' sont deux connexions de L, alors $\nabla' = \nabla + \alpha$ avec $\alpha \in \Omega^1(M)$.

Si ∇ est une connexion et $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\nabla + \alpha$ est une connexion.

Autrement dit, l'espace des connexions de L est un espace affine pour l'espace vectoriel $\Omega^1(M)$.

Exercice : adapter ce résultat au cas des connexions préservant une métrique fixée de L.

Preuve : par l'existence, $\exists (U_i)$ recouvrement ouvert de M tq $L|_{U_i}$ soit trivial. Donc, pour tout i, $L_{|U_i}$ admet une connexion ∇_i. Soit (φ_i) partition de l'unité subordonnée à (U_i). Alors $\sum \varphi_i \nabla_i$ est une connexion de L.
Soient ∇, ∇' deux connexion. $\forall$ repère (U,σ) de L, $\nabla'\sigma - \nabla\sigma = \alpha \otimes \sigma$ avec $\alpha \in \Omega^1(U)$
Alors $\nabla' = \nabla + \alpha$ sur U. α se caractérise par cette équation. Cette unicité locale implique l'existence globale.

Prop : Toute connexion de L s'étend de manière unique en une application linéaire $\nabla : \Omega(M,L) \to \Omega(M,L)$ de degré $+1$ qui vérifie :

$$\nabla(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M),\ s \in \Omega(M,L)$$

Preuve : si (U,σ) est un repère et $\nabla\sigma = \alpha \otimes \sigma$, on a nécessairement

$$\nabla(\beta \otimes \sigma) = (d\beta + (-1)^k \beta \wedge \alpha)\sigma = (d\beta + \alpha \wedge \beta)\sigma, \quad \forall \beta \in \Omega^k(U).$$

Cela définit notre extension.

Prop : Pour toute connexion ∇ de L, il existe $\Theta \in \Omega^2(M)$ telle que $\nabla^2 = \Theta \wedge \cdot$
Θ est fermée. Si ∇ préserve une métrique de L, alors $i\Theta \in \Omega^2(M,\mathbb{R})$.
Si $\nabla' = \nabla + \alpha$ alors $\Theta' = \Theta + d\alpha$

Preuve : localement, $\nabla\sigma = \alpha \otimes \sigma$ donne $\nabla(\beta \otimes \sigma) = (d\beta + \alpha \wedge \beta) \otimes \sigma$
$\nabla^2(\beta \otimes \sigma) = (d(d\beta + \alpha \wedge \beta) + \alpha \wedge (d\beta + \alpha \wedge \beta)) \otimes \sigma = (d\alpha) \wedge \beta \otimes \sigma$

Définition : pour tout fibré L et connexion ∇ de L, $\Theta = \nabla^2$ s'appelle la courbure de ∇. $\frac{i}{2\pi}[\Theta] \in H^2(M,\mathbb{R})$ ne dépend pas de L et s'appelle la classe de Chern réelle de L, on la note $c_1^{\mathbb{R}}(L)$.

Exercice : $c_1^{\mathbb{R}}(L_1 \otimes L_2) = c_1^{\mathbb{R}}(L_1) + c_1^{\mathbb{R}}(L_2)$, $c_1^{\mathbb{R}}(L^*) = -c_1^{\mathbb{R}}(L)$

$c_1^{\mathbb{R}}(f^*L) = f^* c_1^{\mathbb{R}}(L)$.

Remarque (sans preuve) :

① Si M est une surface compacte orientée, alors on a une bijection de {fibrés en droites de base M}$/\sim$ sur $\mathbb{Z}$ qui envoie $[L]$ sur $\int_M c_1^{\mathbb{R}}(L)$.

② Si M est simplement connexe ou plus généralement $H_1(M)$ est sans torsion, alors $L \sim L' \Leftrightarrow c_1^{\mathbb{R}}(L) = c_1^{\mathbb{R}}(L')$.

③ $c_1^{\mathbb{R}}(L)$ est entière en ce sens que $\forall$ surface orientée compacte Σ et application $j : \Sigma \to L$, $\int_\Sigma j^* c_1^{\mathbb{R}}(L) \in \mathbb{Z}$.

④ On sait définir pour tout fibré en droites complexes $L \to \Pi$, une classe de Chern $c_1^{\mathbb{Z}}(L) \in H^2(\Pi,\mathbb{Z})$ telle que le morphisme $H^2(\Pi,\mathbb{Z}) \to H^2(\Pi,\mathbb{R})$ envoie $c_1^{\mathbb{Z}}(L)$ sur $c_1^{\mathbb{R}}(L)$, et pour tout fibrés L, L', $c_1^{\mathbb{Z}}(L) = c_1^{\mathbb{Z}}(L') \Leftrightarrow L \sim L'$.

Soit Π une variété complexe, $L \to \Pi$ un fibré en droites complexe.
Si ∇ est une connexion de L, on note $\nabla^{1,0}$ et $\nabla^{0,1}$ les opérations de $\Gamma(\Pi, L)$ dans $\Omega^{1,0}(\Pi, L)$ et $\Omega^{0,1}(\Pi, L)$ respectivement tels que $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$.

Proposition : soit $L \to \Pi$ un fibré en droites holomorphes hermitien. Alors L admet une unique connexion ∇ qui préserve la métrique et telle que $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.
∇ s'appelle la connexion de Chern. Sa courbure est la courbure de L.

Preuve : Soit (U, σ) un repère holomorphe, $\nabla \sigma = \alpha \otimes \sigma$ avec $\alpha \in \Omega^{1,0}(U)$.
Soit $\varphi = -\ln h(\sigma, \sigma)$. Alors $d\, h(\sigma, \sigma) = (\alpha + \bar{\alpha})\, h(\sigma, \sigma)$ donc $\alpha = -2\varphi$.
Cette unicité locale implique l'existence globale.
La courbure Θ est donnée par $\Theta = 2\bar{\partial}\varphi$