Théorème de Hodge.

Soit M une variété orientée munie d'un élément de volume μ.
Soit $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien de rang m.

Soit $\Delta : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,E)$ un laplacien, c'est à dire que Δ est un opérateur local formellement auto-adjoint, et pour toute carte (U,Φ) et trivialisation $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}^m$, on a

$$\Delta \simeq -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b \qquad (*)$$

où - g^{ij} est une famille de $C^\infty(U,\mathbb{R})$ tq pour tout $x \in U$, $(g^{ij}(x))_{ij}$ est symétrique définie positive.
- $a_1, \dots, a_n$, $b \in C^\infty(U, \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}))$

Théorème de Hodge : si M est compacte, $\ker \Delta$ est de dimension finie et $\Gamma(M,E) = \ker \Delta \oplus \mathrm{Im}\, \Delta$.

Pour la preuve, on utilise les espaces de Sobolev H^1, H^0 et H^{-1} de sections de E. Avant de les définir, quelques rappels sur $\mathbb{R}^n$.

Les normes Sobolev de $\mathbb{R}^n$.

On travaille avec $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, même si l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ serait plus naturel. On définit les norme Sobolev $\| \ \|_s$ à $s \in \mathbb{R}$ par.

$$\| f \|_0 = \left(\int_U |f|^2 \, dx_1 \dots dx_m \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_s = \| \hat{f} \, N^s \|_0 \qquad \text{où } \hat{f} \text{ est la transformée de Fourier de } f$$

$$N(\xi)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

(plus précisément, $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(x) e^{-i\xi x} dx$, la constante pour que ce soit unitaire, l'inverse est $f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} dx$).

On aura besoin essentiellement de $s = 0, 1$ ou -1.

On a: $$\| f \|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \| \partial_i f \|_0^2 + \| f \|_0^2 .$$

$$\| f \|_{-1} = \sup_{g \in \mathcal{D}, \, g \neq 0} \frac{|(f, g)|}{\| g \|_1}$$

Preuve: $\widehat{\partial_i f} = i \xi_i \hat{f}$ pour la première identité.

et $\| f \|_{-1} = \| \hat{f} N^{-1} \|_0 = \sup \frac{|(\hat{f} N^{-1}, g)|}{\| g \|_0} = \sup \frac{|(f, h)|}{\| h \|_1}$ avec $\hat{h} = g N^{-1}$

et pour conclure, il faut s'assurer que lorsque h décrit $\mathcal{D}$, g décrit une partie dense de L^2 (avec la classe de Schwartz, on n'aurait pas ce problème car transformée de Fourier et multiplication par N sont des isomorphisme de $\mathcal{S}$).

Pour tout $s < t$, on a que $N^s \leq N^t$ et donc $\| f \|_s \leq \| f \|_t$.

Du fait que $|\xi_i| \leq N(\xi)$, il vient $\| \partial_i f \|_s \leq \| f \|_{s+1}$

Enfin, $\forall f, g \in \mathcal{D}$, $\| fg \|_s \leq C(f) \| g \|_s$.

Lemme : ① $\forall s \leq t$, $\|g\|_s \leq \|g\|_t$.

② $\|\partial_i g\|_s \leq \|g\|_{s+1}$

③ $\forall f, g \in \mathcal{D}$, $\|fg\|_s \leq C(f)\|g\|_s$

④ $\forall$ opérateur différentiel $P = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha \partial^\alpha$ à coefficients $a_\alpha \in \mathcal{D}$,

$\|Pg\|_s \leq C(P)\|g\|_{s+\ell}$.

Preuve : ① $s \leq t \Rightarrow N^s \leq N^t$, ② $|\xi_i| \leq N(\xi)$ ④ conséquence de ② et ③.

③ pour $s=0$, $\|fg\|_0 \leq (\sup |f|)\|g\|_0$.

$s=1$, $\|fg\|_1^2 = \|fg\|_0^2 + \sum \|\partial_i(fg)\|_0^2$ et $\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$.

$s=-1$, $|(fg, h)| = |(g, fh)| \leq \|g\|_{-1}\|fh\|_1 \leq \|g\|_{-1} C(f)\|h\|_1$ d'après ↻

donc $\|fg\|_{-1} \leq C(f)\|g\|_{-1}$.

On étend facilement $s=1$ à $s \in \mathbb{N}$, $s=-1$ à $s \in -\mathbb{N}$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, c'est plus compliqué.

Lemme : $\forall$ difféo $\Phi : U \to V$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$,
$\forall K$ compact de V, $\exists C > 0$ tel que $\forall f \in \mathcal{D}$ à support dans K, on ait

$$\|\Phi^* f\|_s \leq C\|f\|_s$$

Preuve : exercice pour $s=0$ (facile, ne pas oublier le Jacobien),
pour $s=1$, calculer (∂f) puis $s=-1$ par dualité.

Retour à notre variété M compacte orientée avec son élément de volume μ.
$E \to M$ fibré vectoriel hermitien

On définit le produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_M f \cdot \bar{g}\, \mu$, $\forall f, g \in \Gamma(M, E)$.

la norme H^0 : $\| f \|_0 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Pour définir la norme H^s, on se donne un atlas fini (U_i, ϕ_i) de M avec pour chaque i, une trivialisation $E_{|U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C}^m$.
Donc pour tout i, toute section $\sigma \in \Gamma(M, E)$ supporté dans U_i s'identifie à une fonction f dans $C_0^\infty(\phi(U_i), \mathbb{C}^m)$ et on pose $\| \sigma \|_{i,s} := \sum_{\ell=1}^{m} \| f_\ell \|_s$
On se donne aussi une partition de l'unité ψ_i subordonnée à (U_i).
Alors pour tout $\sigma \in \Gamma(M, E)$, on pose $\| \sigma \|_s = \sum_i \| \psi_i \sigma \|_{i,s}$

Exercice : montrer que ces normes ne dépendent pas du choix (U_i, ϕ_i), trivialisations et partition de l'1 à équivalence près.

Enfin, on définit l'espace $H^s(M, E)$ comme la complétion de l'espace vectoriel normé $(\Gamma(M, E), \| \ \|_s)$.

Des préliminaires sur $\mathbb{R}^m$, on déduit $C > 0$ telle que $\forall u, v \in \Gamma(M, E)$,

$$\| u \|_{-1} \leq C \| u \|_0 \ , \quad \| u \|_0 \leq C \| u \|_1 \quad \text{et} \quad |\langle u, v \rangle| \leq C \| u \|_{-1} \| v \|_1$$

D'où par prolongement des applications $H^1(M, E) \to H^0(M, E)$, $H^0(M, E) \to H^{-1}(M, E)$ (*)
et une application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(M, E) \times H^{-1}(M, E) \to \mathbb{C}$.

On admet les deux théorèmes suivants :

Théorème :

① les applications (ι) sont injectives donc $H^1(M,E) \subset H^0(M,E) \subset H^{-1}(M,E)$

② $\langle \cdot, \cdot \rangle$ met en dualité $H^1(M,E)$ et $H^{-1}(M,E)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in (H^1(M,E))^*$, il existe $u \in H^{-1}(M,E)$ tel que $f = \langle \cdot, u \rangle$
——— $g \in (H^{-1}(M,E))^*$, ——— $v \in H^1(M,E)$ tel que $g = \langle \cdot, v \rangle$.

Théorème de Rellich : l'injection $H^1(M,E) \to H^0(M,E)$ est compacte.

Prop : Si $P : \Gamma(M,E) \to$ est un opérateur différentiel d'ordre o, alors
$\| Pu \|_s \leq C_p \| u \|_{s+o}$,
donc P se prolonge continuement $H^{s+o} \to H^s$.

En particulier, notre Laplacien Δ se prolonge continuement $H^1 \to H^{-1}$
En fait, on peut "presque" inverser l'inégalité :

Théorème (identité de Garding) : $\exists C$ tel que $\forall u \in H^1(M,E)$,
$$\| u \|_1 \leq C(\| \Delta u \|_{-1} + \| u \|_0)$$

Preuve plus tard, et en travaillant beaucoup, on peut en déduire :

Théorème (régularité) : $\forall u \in H^1(M,E)$, $\Delta u \in \Gamma(M,E) \Rightarrow u \in \Gamma(M,E)$