Inégalité de Garding Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Δ un laplacien de $C^\infty(\Omega)$, $\Delta u = -\sum_{i,j} g_{ij}\, \partial_i \partial_j u + Lu$
où L est un opérateur différentiel de $C^\infty(\Omega)$ de degré 1, $g_{ij}(x)$ définie positive $\forall x \in \Omega$

Soit K un compact de Ω, $C^\infty_K = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans $K \} \subset C^\infty(\Omega)$
Δ étant différentiel de degré 2, $\exists C>0$ tel que $\forall u \in C^\infty_K$,
$$\| \Delta u \|_{-1} \leq C \| u \|_1$$

Proposition: Il existe $C>0$ tel que $\forall u \in C^\infty_K$, on ait
$$\| u \|_1^2 \leq C \left((\Delta u, u) + \| u \|_0^2 \right).$$

Conséquence: $\exists C>0$, $\forall u \in C^\infty_K$, $\| u \|_1 \leq C (\| \Delta u \|_{-1} + \| u \|_0)$

preuve: $|\langle \Delta u, u \rangle| \leq C \| \Delta u \|_{-1} \| u \|_1$ et $\| u \|_0 \leq \| u \|_1$.

Preuve de la proposition: on intègre par partie:

$$-\int g_{ij} (\partial_i \partial_j u) . \bar{u} \, dx = \int g_{ij} (\partial_i u)(\partial_j \bar{u}) \, dx + \int (\partial_i u)\, \bar{u}\, \partial_j (g_{ij}) \, dx$$

Donc $\langle \Delta u, u \rangle = \int g_{ij} (\partial_i u)(\partial_j \bar{u}) \, dx + \int (L' u) . \bar{u} \, dx$
où L' est un opérateur différentiel d'ordre 1.

Sur K on a : $\sum_{i,j} g_{ij}\,\xi_i\xi_j \geq \frac{1}{C}\,|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

donc $\int g_{ij}\,(\partial_i u)(\partial_j \bar{u})\,dx \geq \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_0^2 = \frac{1}{C}\left(\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2\right)$.

D'autre part, $\left|\int L'u \cdot \bar{u}\,dx\right| \leq C\,\|u\|_1\,\|u\|_0$.

Donc $\langle \Delta u, u\rangle \geq \frac{1}{C}\,\|u\|_1^2 - \frac{1}{C}\,\|u\|_0^2 - C\,\|u\|_1\,\|u\|_0$.

Comme $\left(\varepsilon^{1/2}\,\|u\|_1 - \frac{1}{2\varepsilon^{1/2}}\,\|u\|_0\right)^2 \geq 0$, $\|u\|_1\,\|u\|_0 \leq \varepsilon\,\|u\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\,\|u\|_0^2$

il vient
$$\langle \Delta u, u\rangle \geq \frac{1}{C}\,\|u\|_1^2 - \left(\frac{C}{4\varepsilon} + \frac{1}{C}\right)\|u_0\|^2 - C\varepsilon\,\|u\|_1^2$$

On choisit ε petit pour que $\frac{1}{C} - C\varepsilon > 0$ et il vient :

$$\langle \Delta u, u\rangle \geq \frac{1}{C}\,\|u\|_1^2 - C\,\|u_0\|^2.$$

On se donne maintenant un Laplacien Δ sur une variété compacte M.

Théo : $\exists\, C>0$ tel que $\forall v \in C^\infty(M)$, $\|v\|_1 \leq C\left(\|\Delta v\|_{-1} + \|v\|_1\right)$

Preuve : Il suffit de cartes, $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ tels que $\operatorname{Supp}\varphi \subset \operatorname{int}\{\psi = 1\} \subset \operatorname{Supp}\psi \subset U$
alors on raisonne dans la carte. On a le résultat local :

$$\|\varphi v\|_1 \leq C\left(\|\Delta \varphi v\|_{-1} + \|\varphi v\|_0\right) \leq C\left(\|\varphi \Delta v\|_{-1} + \|\psi v\|_0\right)$$

car : $[\varphi, \Delta]$ est d'ordre 1 et $[\varphi, \Delta]\,v = [\varphi, \Delta]\,\psi v$

donc $\|[\varphi, \Delta] v\|_{-1} \leq C\,\|\psi v\|_0$

et $\varphi v = \varphi\,\psi v \Rightarrow \|\varphi v\|_0 \leq C\,\|\psi v\|_0$.

On remonte sur la variété, comme $\|\psi \Delta v\|_{-1} \leq C \|\Delta v\|_{-1}$ et $\|\psi v\|_0 \leq C \|v\|_0$
cela donne $\|\psi v\|_1 \leq C(\|\Delta v\|_{-1} + \|v\|_0)$.
Enonité partition de l'unité...