Preuve du théorème de Hodge en admettant les théorèmes précédents

dans ce qui suit, je note $H^i = H^i(\Gamma, E)$ pour $i = 1, 0, -1$.

Lemme : $\ker(\Delta : H^1 \to H^{-1})$ est de dimension finie et contenu dans $\Gamma(M, E)$.

Preuve : si $u \in H^1$, $\Delta u = 0 \Rightarrow u$ lisse par régularité.
Si $\ker \Delta$ était de dimension infinie, il existerait une suite (u_m) de $\ker \Delta$ telle que $\|u_m\|_0 = 1$ et $\langle u_n, u_m \rangle = 0$ pour tout $n \neq m$
Donc $\|u_n - u_m\|_0 = \sqrt{2}$.
D'autre part, $\Delta u_m = 0 \Rightarrow \|u_m\|_1$ borné par Garding
$\Rightarrow \exists$ sous-suite convergente dans H^0 par Rellich, contradiction

Pour résumer : régularité + Garding + Rellich
$\Rightarrow (\ker \Delta, \|\cdot\|_0)$ a une boule unité compacte $\Rightarrow \dim \ker \Delta < \infty$ par Riesz.

Théorème : $H^{-1} = \ker \Delta \oplus \Delta(H^1)$

Cela impliquera par le théo de régularité que $\Gamma(\Pi, E) = \ker \Delta \oplus \Delta(\Gamma(\Pi, E))$.
et terminera la preuve.

Pour tout sous-espace F de dimension finie de H^1, on définit son orthogonal dans H^{-1} :

$$F^\perp := \{ u \in H^{-1} / \langle u, v \rangle = 0 , \forall v \in F \}$$

Fait : $H^{-1} = F \oplus F^\perp$ et le projecteur $\Pi_F : H^{-1} \to F$ de noyau $F^\perp$ est donné par $\Pi_F u := \sum_{i=1}^{n} \langle u, w_i \rangle w_i$ (*)

où $(w_1, \dots, w_n)$ base de F orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque : la restriction de Π_F à H^0 est le projecteur orthogonal de H^0 d'image F

donc $\forall v \in F, \forall u \in H^0, \quad \| u - \Pi_F u \|_0 \leq \| u - v \|_0$

Preuve : on commence par définir Π_F par la formule (*).

Et on vérifie que $\Pi_F^2 = \Pi_F$, $\mathrm{Im}\, \Pi_F = F$, $\mathrm{Ker}\, \Pi_F = F^\perp$.

Ensuite, $\forall u \in H^{-1}$, $u = \Pi_F u + (u - \Pi_F u)$ et $(u - \Pi_F u) \in \mathrm{Ker}\, \Pi_F$

donc $H^{-1} = F + F^\perp$. Par ailleurs, $F \cap F^\perp = 0$.

Pour montrer le théorème précédent, il suffit alors de montrer que

$$(\mathrm{Ker}\, \Delta)^\perp = \Delta(H^2).$$

Il est facile de voir que : $\Delta(H^2)_\perp = \mathrm{Ker}\, \Delta$ (*)

Ici l'orthogonal d'un sous-espace G de H^{-1} est défini par :

$$G_\perp = \{ u \in H^2 / \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in G \}$$

Preuve de (*) : Δ formellement autoadjoint et continu $H^1 \to H^{-1}$

donc $\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle$, $\forall u, v \in H^1$.

Alors, $u \in \Delta(H^1)_\perp \Rightarrow \langle \Delta u, v \rangle = 0$, $\forall v \in H^1$

$\Rightarrow \Delta u = 0$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ met en dualité H^{-1} et H^1.

Lemme : Soit G sous-espace de H^{-1} et $F = G_\perp \subset H^1$.

Alors $G = F^\perp \Leftrightarrow G$ est fermé dans H^{-1}.

Preuve : $\Rightarrow$ $F^\perp$ fermé dans H^{-1} par continuité $H^1 \times H^{-1} \to \mathbb{C}$ de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$\Leftarrow$ $F = G_\perp$ implique que $\forall u \in F, v \in G$, $\langle u, v \rangle = 0$ et donc $G \subset F^\perp$.

réciproquement, si on a $u \in F^\perp \setminus G$, par le thm de Hahn-Banach,

il existe Ψ dans le dual topologique de H^{-1} tel que $\Psi = 0$ sur G et $\Psi(u) \neq 0$

Comme $(H^{-1})^* = H^1$, $\Psi = \langle \cdot, v \rangle$ pour un certain $v \in H^1$.

Donc $\Psi = 0$ sur $G \Rightarrow v \in G_\perp = F$ et comme $u \in F^\perp$, $\Psi(u) = \langle u, v \rangle = 0$

une contradiction

Rappel : une des conséquences / formulation de Hahn-Banach est :

Pour tout V espace normé, U sous-espace de V et $x \in V \setminus \bar{U}$, il

existe Ψ dans le dual topologique de V tel que $\Psi_{|U} = 0$ et $\Psi(x) \neq 0$.

Conclusion : Il suffit de montrer que $\Delta(H^1)$ fermé dans H^{-1}

et on aura terminé.

Remarque : si $L : E \to F$ est linéaire continue avec E Banach, F evn et $\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F \ \forall u \in E$, alors $L(E)$ fermé dans F

preuve : si $L(u_n) \to v$ dans F, alors (u_n) est de Cauchy dans E donc converge vers un $u \in E$ et alors $Lu = v$.

Ici on n'a pas $\|u\|_1 \leq C \|\Delta u\|_{-1}$ mais on a Garding :

$$\|u\|_1 \leq C \left(\|\Delta u\|_{-1} + \|u\|_0 \right)$$

et Rellich : l'injection $H^1 \to H^0$ est compacte.

Lemme : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ F sous-espace de dim finie de H^1 tel que

$$\forall u \in H^1, \quad \|u\|_0 \leq \varepsilon \|u\|_1 + \|\Pi_F u\|_0$$

Preuve : d'après Rellich, si S est la sphère unité de H^1, son adhérence $\overline{S}^0$ dans H^0 est compacte. Donc du recouvrement de $\overline{S}^0$

$$B(x, \varepsilon) = \{ y \in H^0(\Omega, \mathbb{R}) \ / \ \|y - x\|_0 < \varepsilon \}, \quad x \in S$$

on peut extraire un sous recouvrement fini $B(x_i, \varepsilon)$, $x_1, \dots, x_N \in S$

Soit F = sous-espace engendré par $x_1, \dots, x_N$.

Il suffit de montrer l'inégalité $\forall u \in S$. Comme $u \in B(x_i, \varepsilon)$ pour un certain i, $\|u - \Pi_F u\|_0 \leq \varepsilon$ donc $\|u\|_0 \leq \varepsilon + \|\Pi_F u\|_0$

Lemme : $\Delta(H^1)$ est fermé dans H^{-1}.

Preuve : on applique le lemme précédent à $\varepsilon = \frac{1}{2C}$ où C est la constante dans l'inégalité de Garding. Il vient :

$$\|u\|_1 \leq C\left(\|\Delta u\|_{-1} + \|u\|_0\right) \leq C\left(\|\Delta u\|_{-1} + \|\pi_F u\|_0\right) + \tfrac{1}{2}\|u\|_1 .$$

et donc :

$$\|u\|_1 \leq 2C\left(\|\Delta u\|_{-1} + \|\pi_F u\|_0\right) \quad (*)$$

Soit $G = F^\perp \cap H^1$. Alors $H^{-1} = F \oplus F^\perp$ et $F \subset H^1$ entraîne $H^1 = F \oplus G$

De plus, G est fermé dans H^1, car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue $H^1 \times H^1 \to \mathbb{C}$.

d'après $(*)$ $\quad \forall u \in G,\ \|u\|_1 \leq 2C\,\|\Delta u\|_{-1}$

on en déduit que $\Delta(G)$ fermé dans H^{-1}

D'autre part, $\Delta(F)$ de dimension finie.

Enfin, dans un espace vectoriel normé, la somme d'un sous-espace de dim $< \infty$ et d'un sous-espace fermé est fermée (exercice).