Théorie de Hodge pour les variétés complexes

Algèbre linéaire : soit F un espace hermitien, i.e. un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien.
Alors ΛF est hermitien, le produit scalaire étant donné sur les éléments décomposables par $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q) = \begin{cases} \det(\alpha_i, \beta_j) & \text{si } p=q \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$

Preuve : on a d'une part l'accouplement de dualité $\Lambda F \times \Lambda F^* \to \mathbb{C}$ et d'autre part l'isomorphisme $\overline{F} \simeq F^*$, $x \to (\cdot, x)$. Les deux mis ensemble fournissent un accouplement $\Lambda F \times \Lambda \overline{F} \to \mathbb{C}$, donc une application sesquilinéaire $\Lambda F \times \Lambda F \to \mathbb{C}$.
Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ est une base de F, (α_I) est orthonormé

Si F est hermitien, $\overline{F}$ l'est aussi $\left((\xi, \eta)_{\overline{F}} = (\overline{\xi}, \overline{\eta})_F \right)$.
Comme $\overline{F} \simeq F^*$, ΛF^* est aussi hermitien.

Complexification des espaces euclidiens :

Si E est un espace euclidien, alors $F = E \otimes \mathbb{C}$ est hermitien, son produit scalaire étant $(X, Y)_F = (X, \overline{Y})_E$ $\left(= (X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) + i(X_2, Y_1) - i(X_1, Y_2) \right)$
On vérifie que cette opération commute au passage au dual ou à l'algèbre extérieure, c'est à dire que les isomorphismes que nous connaissons déjà $E^* \otimes \mathbb{C} \simeq F^*$ et $\Lambda F \simeq (\Lambda E) \otimes \mathbb{C}$, sont des isomorphismes d'espaces hermitiens.
Preuve : avec des bases orthonormées.

Supposons que E est espace vectoriel réel muni d'une structure complexe J et de $\omega \in \Lambda^{1,1}E^*$ positive. Alors $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ est un produit scalaire de E, et $E\otimes\mathbb{C}$ hérite d'un produit scalaire hermitien $g(X,\bar{Y})$.

Fait: $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ sont orthogonaux. Plus généralement les $\Lambda^{p,q}E$ sont 2 à 2 orthogonaux.

Preuve : on avait vu que $E^{1,0}$ admet une base $z_1,\dots,z_n$ telle que $\omega = i\sum u_i \wedge \bar{u}_i$.
où (u_i) base de $(E^*)^{1,0}$ duale de (z_i).
On en déduit que $(z_i, \bar{z}_i)$ est une bon de $E\otimes\mathbb{C}$, puis que $z_I \wedge z_{\bar{J}}$ est une bon de $\Lambda E\otimes\mathbb{C}$.

Fait : l'élément de volume riemannien μ associé à g (normé 1 et >0) est $\frac{\omega^{\wedge n}}{n!}$
Preuve : on avait construit une bon e_i, f_i telle que $\omega = \sum e_i^* \wedge f_i^*$ et $f_i = Je_i$.
Alors $\mu = (e_1^* \wedge f_1^*) \wedge \dots \wedge (e_n^* \wedge f_n^*) = \frac{\omega^{\wedge n}}{n!}$
Rq : on repasse aux u_i par $u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^* + i f_i^*)$ et alors $\mu = i^n (u_1 \wedge \bar{u}_1) \wedge \dots \wedge (u_n \wedge \bar{u}_n)$.

Soit M^n une variété complexe munie d'une forme positive $\omega \in \Omega^{1,1}(M,\mathbb{R})$, autrement dit TM est muni d'une métrique hermitienne.
Munissons $\Omega(M,\mathbb{C})$ du produit scalaire: $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha,\beta)\,\mu$
où $\mu = \frac{\omega^{\wedge n}}{n!}$ et (α,β) est le produit scalaire ponctuel pour la métrique de $\Lambda TM\otimes\mathbb{C}$ induite par ω.

D'après le préliminaire d'algèbre linéaire, les $\Omega^{p,q}(n)$ sont deux à deux orthogonaux
On dit qu'un endomorphisme A de $\Omega(n,\mathbb{C})$ est homogène de bidegré (r,s) si
pour tout (p,q), $A(\Omega^{p,q}(M)) \subset \Omega^{p+r,q+s}(M)$.

Fait : si A est homogène de bidegré (r,s), alors $\bar{A}$ est homogène de bidegré (s,r)
si de plus A admet un adjoint formel A^*, alors A^* ——— $(-r,-s)$
De plus tout endomorphisme A est somme d'endomorphismes homogènes, $A = \sum A^{p,q}$
et A admet un adjoint formel ssi tous les $A^{p,q}$ en admettent un.

Par conséquent, ∂ et $\bar{\partial}$ admettent pour adjoint formel $(d^*)^{-1,0}$ et $(d^*)^{0,-1}$.
Introduisons le laplacien $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$

Théorème : Pour toute variété hermitienne compacte, $\Omega(M) = \operatorname{Ker}\Delta_{\bar{\partial}} \oplus \operatorname{Im}\Delta_{\bar{\partial}}$

découle du fait que $\Delta_{\bar{\partial}}$ est un laplacien.

Conséquence : pour toute variété hermitienne compacte, $H^{p,q}(M) \simeq \mathcal{H}_{p,q}(M)$
où $\mathcal{H}_{p,q}(M) = \operatorname{Ker}\Delta_{\bar{\partial}} \cap \Omega^{p,q}(M)$.

Preuve : On a que $\operatorname{Ker} \Delta_{\bar\partial} = \ker \bar\partial \cap \ker \bar\partial^*$. Comme $\bar\partial^2 = 0$, il vient :

$$\Omega(M) = \operatorname{Ker} \Delta_{\bar\partial} \oplus \bar\partial(\Omega(M)) \oplus \bar\partial^*(\Omega(M)) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} \bar\partial = \operatorname{Ker} \Delta_{\bar\partial} \oplus \bar\partial(\Omega(M)).$$

Comme $\bar\partial$, $\bar\partial^*$, $\Delta_{\bar\partial}$ sont de bidegré $(0,1)$, $(0,-1)$ et $(0,0)$, on a :

$$\Omega^{p,q}(M) = \underbrace{\mathcal{H}_{p,q}(M) \oplus \bar\partial(\Omega^{p,q-1}(M))}_{\ker \bar\partial \cap \Omega^{p,q}(M)} \oplus \bar\partial^*(\Omega^{p,q+1}(M))$$

Par conséquent, $\mathcal{H}_{p,q}(M) \simeq H^{p,q}(M)$.

Corollaire : pour une variété complexe compacte, $\dim H^{p,q}(M) < \infty$ pour tout p,q

Les nombres $h^{p,q} = \dim H^{p,q}$ s'appellent les nombres de Hodge.