Dualité de Serre.

Algèbre linéaire : soient E, J, ω comme ci-dessus. Rappelons que l'opérateur $*$ de Hodge est l'endomorphisme de ΛE^* tel que $g(\alpha,\beta)\mu = \alpha \wedge *\beta$.
On étend $*$ à $\Lambda E^* \otimes \mathbb{C}$ de sorte qu'il soit $\mathbb{C}$-linéaire, alors si h est le produit scalaire hermitien de ΛE^*, $h(\alpha,\beta)\mu = \alpha \wedge *\overline{\beta}$.
On en déduit que $* : \Lambda^{p,q} E^* \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p} E^*$.

Revenons à notre variété complexe M.
Si M est compacte, on a un accouplement :

$$H^{p,q}(M) \times H^{n-p,n-q}(M) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [\alpha], [\beta] \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$$

En effet, si $\alpha = \bar{\partial}\gamma$ avec $\gamma \in \Omega^{p,q-1}$ alors $\gamma \wedge \beta$ est de bidegré $(n,n-1)$ donc $d(\gamma \wedge \beta) = \bar{\partial}(\gamma \wedge \beta) = \alpha \wedge \beta$ si $\bar{\partial}\beta = 0$ donc $\int_M \alpha \wedge \beta = 0$ par Stokes.
De même, si $[\beta] = 0$ dans $H^{n-p,n-q}(M)$ alors $\int_M \alpha \wedge \beta = 0$

Théorème : pour toute variété M complexe compacte, cet accouplement est non dégénéré. Autrement dit $\left(H^{p,q}_{(M)}\right)^* = H^{n-p,n-q}_{(M)}$.

Corollaire : $h_{p,q} = h_{n-p,n-q}$

Preuve : on munit M d'une métrique hermitienne comme ci-dessus.
Alors $d^* = - * d *$ et $d = \partial + \bar\partial$ implique que $\bar\partial^* = (d^*)^{q-1} = - * \partial *$
et de même $\partial^* = - * \bar\partial *$.

Donc si $\alpha \in \mathcal{H}_{p,q}(M)$, $\bar\partial \alpha = \bar\partial^* \alpha = 0 \Rightarrow \bar\partial * \bar\alpha - \bar\partial^* * \bar\alpha = 0$

En effet, $\bar\partial \alpha = 0 \Rightarrow \partial \bar\alpha = 0 \Rightarrow \partial * * \bar\alpha = 0 \Rightarrow \bar\partial^* * \bar\alpha = 0$

$\bar\partial^* \alpha = 0 \Rightarrow \partial * \alpha = 0 \Rightarrow \bar\partial * \bar\alpha = 0$

Donc $\alpha \to * \bar\alpha$ envoie $\mathcal{H}_{p,q}(M)$ sur $\mathcal{H}_{m-p,m-q}(M)$. On sait par ailleurs que $* *^2 = (-1)^{d(\alpha)}$ sur $\Omega^k(M,\mathbb{C})$. On en déduit que $\mathcal{H}_{p,q}(M) \simeq \mathcal{H}_{m-p,m-q}(M)$.

Enfin $\int_M d\alpha * \bar\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.