Soit Π variété complexe avec une métrique hermitienne et $L \to \Pi$ un fibré en droites hermitiens. Alors les $\Lambda^{p,q} T^*\Pi \otimes L$ sont hermitiens et on a un élément de volume canonique μ, d'où un produit scalaire sur $\Omega^{p,q}(T^*\Pi \otimes L)$.

Supposons L holomorphe. La connexion de Chern ∇ se décompose $\nabla = \bar\partial + \partial_\nabla$ où pour tout (p,q), $\partial_\nabla : \Omega^{p,q}(\Pi, L) \to \Omega^{p+1,q}(\Pi, L)$.
Introduisons les laplaciens $\Delta_{\bar\partial} = \bar\partial^* \bar\partial + \bar\partial \bar\partial^*$, $\Delta_{\partial_\nabla} = \partial_\nabla \partial_\nabla^* + \partial_\nabla^* \partial_\nabla$.

Théorème : Si la métrique de M est kählerienne, $\Delta_{\bar\partial} = \Delta_{\partial_\nabla} + [i\Theta, L_\omega^*]$
où Θ est la courbure de ∇ et $\omega = -\operatorname{im} h$.

Preuve en plusieurs étapes.
① on se donne un repère holomorphe (U, σ) et on note $\varphi = -\ln |\sigma|^2$.
Alors $\forall \alpha \in \Omega(U)$, $\bar\partial(\alpha\sigma) = (\bar\partial \alpha)\,\sigma$, $\partial_\nabla(\alpha\sigma) = (\partial\alpha - (\partial\varphi) \wedge \alpha)\,\sigma$
$\bar\partial^*(\alpha\sigma) = (\bar\partial^* \alpha + \varepsilon(\bar\partial\varphi)^* \alpha)\,\sigma$, $\partial_\nabla^*(\alpha\sigma) = (\partial^* \alpha)\,\sigma$.
On a déjà vu les deux premières identités.
Si P est un opérateur local de $\Omega(\Pi, L)$, alors $P(\alpha\sigma) = (Q\alpha)\,\sigma$ avec Q un opérateur de $\Omega(U)$. On a $\langle P(\alpha\sigma), \beta\sigma \rangle = \langle Q(\alpha), e^{-\varphi}\beta \rangle = \langle \alpha, Q^*(e^{-\varphi}\beta) \rangle$
$= \langle \alpha\sigma, e^{\varphi} Q^*(e^{-\varphi}\beta)\,\sigma \rangle$ donc $P^*(\alpha\sigma) = e^{\varphi} Q^*(e^{-\varphi}\alpha)\,\sigma$.
Ensuite, on a : $e^{\varphi}\partial e^{-\varphi} = \partial - \varepsilon(\partial\varphi)$ sur $\Omega(U)$ donc en prenant l'adjoint, puis le conjugué : $e^{\varphi}\partial^* e^{-\varphi} = \partial^* + \varepsilon(\partial\varphi)^*$ et $e^{\varphi}\bar\partial^* e^{-\varphi} = \bar\partial^* + \varepsilon(\bar\partial\varphi)^*$
La 3ième et 4ième égalités découlent alors de la 1ère et la 2ième.

② On en déduit les identités de Kähler pour L :

$[\bar\partial^*, L] = i\partial_\nabla$, $[\bar\partial^*_\nabla, L] = -i\bar\partial$, $[L^*, \bar\partial] = -i\partial^*_\nabla$, $[L^*, \partial_\nabla] = i\bar\partial^*$

pour démontrer la première, choisir σ telle que $d\varphi = 0$ en p. pour la seconde, c'est immédiat. Pour les deux dernières, prendre l'adjoint des deux premières.

③ on obtient le résultat final par l'identité de Jacobi

Par Jacobi : $[L^*, [\partial_\nabla, \bar\partial]] + [\partial_\nabla, [\bar\partial, L^*]] - [\bar\partial, [L^*, \partial_\nabla]] = 0$

par les identités kählériennes, $[L^*, [\partial_\nabla, \bar\partial]] + i[\partial_\nabla, \partial^*_\nabla] - i[\bar\partial, \bar\partial^*] = 0$

Enfin, $[\bar\partial, \bar\partial^*] = \Delta_{\bar\partial}$, $[\partial_\nabla, \partial^*_\nabla] = \Delta_{\partial_\nabla}$ et un calcul direct à partir de $\bar\partial(\alpha\sigma) = (\bar\partial\alpha)\sigma$ et $\partial_\nabla(\alpha\sigma) = (\partial\alpha - \partial\varphi\wedge\alpha)\sigma$ donne $[\partial_D, \bar\partial] = \Theta(L)$.