Intermède d'algèbre linéaire.

① E espace euclidien, $\forall \alpha \in E$, $\varepsilon(\alpha) : \Lambda E \to \Lambda E$ admet pour adjoint $\imath_X : \Lambda E \to \Lambda E$ où $X \in E$ tel que $\alpha(Y) = (X,Y)$, $\forall Y \in E$

Preuve : on doit montrer $(\alpha \wedge \gamma, \theta) = (\gamma, \imath_X \theta)$, $\forall \gamma, \theta \in \Lambda E$

on peut supposer que α est de norme 1, X en est de même pour X, on introduit alors une base orthonormée (X_i) de E telle que $X = X_1$.

Soit (λ_i) la base duale. Alors $\alpha = \lambda_1$ et on doit vérifier que

$(\lambda_1 \wedge \lambda_I, \lambda_J) = (\lambda_I, \imath_{X_1} \lambda_J)$, $\forall I, J \subset \{1, \dots, n\}$.

cette quantité vaut 1 si $J = \{1\} \amalg I$, 0 sinon.

② soit E muni d'une structure complexe j et d'une forme $\omega \in \Lambda^{1,1} E^*$ positive.

On note $L = \varepsilon(\omega) : \Lambda^* E^* \circlearrowleft$. alors $[L, L^*] = (k-n)$ sur $\Lambda^k E^*$.

Preuve : $(e_i, f_i = J e_i)$ base orthogonale de E, α_i, β_j base duale, $\omega = \sum \alpha_i \wedge \beta_i$, $\varepsilon(\omega)^* = \sum \imath_{f_i} \imath_{e_i}$. Alors si $i \neq j$, $[\varepsilon(\alpha_i)\varepsilon(\beta_i), \imath_{f_j} \imath_{e_j}] = 0$

$[\varepsilon(\alpha_i)\varepsilon(\beta_i), \imath_{f_i} \imath_{e_i}]\, \alpha_I \wedge \beta_J = \begin{cases} \alpha_I \wedge \beta_J & \text{si } i \in I \cap J \\ -\alpha_I \wedge \beta_J & \text{si } i \notin I \text{ et } i \notin J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

③ Si maintenant $E \to M$ fibré vectoriel hermitien et μ élément de volume de M.

Pour tout $\xi \in \Gamma(M, \mathrm{End}\, E)$, on note $P_\xi : \Gamma(M, E) \circlearrowleft$ tel que $(P_\xi s)(x) = \xi(x) \cdot s(x)$

Alors l'adjoint formel de P_ξ pour le produit scalaire $\langle s, t \rangle = \int_M (s,t)\, d\mu$ est P_{ξ^*} où $\xi^*(x) = (\xi(x))^*$ adjoint pour $\mathrm{End}\, E_x$

Si A est un opérateur formellement auto-adjoint de $\Gamma(M,L)$, on dit que A est positif si $\forall s \in \Gamma(M,L)$ à support compact, $\langle As, s\rangle \geq 0$.
Si A et B sont deux opérateurs formellement autoadjoints, $A \geq B \overset{(=)}{\text{déf}} A - B \geq 0$.

Remarque : ① les opérateurs $\Delta_{\bar\partial}$ et Δ_{∂} sont positifs.

② si $E \to M$ est un fibré hermitien et $\xi \in \Gamma(M, \mathrm{End}\, E)$ est bornée, alors $|\langle P_\xi u, u\rangle| \leq C \langle u, u\rangle$ $\forall u \in \Gamma(M,E)$ à support compact avec $C = \sup_{x\in M} |\xi(x)|$.
Donc $-C \leq P_\xi \leq C$.

Théorème : Soit (M,ω) variété kählerienne compacte. Soit $L \to M$ et $L' \to M$ deux fibrés en droites holomorphes hermitiens. On suppose $i\Theta(L) = \omega$.
Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout entier k et pour tout q,
$\Delta_{\bar\partial} \geq qk - C$ sur $\Omega^{0,q}(M, L^k \otimes L')$.

Preuve : Soit $E = L^k \otimes L' \otimes K_M^{-1}$ avec $K_M = \Lambda^n (T^{*,0}M)^*$
On applique le théorème précédent à ce fibré et la métrique $\omega = i\Theta(L)$, il vient : $\Delta_{\bar\partial} \geq [i\Theta(E), L_\omega^*]$ sur $\Omega(M,E)$.
On a : $\Theta(E) = k\omega + \Theta(L' \otimes K_M^{-1})$
Sur $\Omega^{n,q}(M)$, $[i\omega, L_\omega^*] = q$ et $[i\Theta(L'\otimes K_M^{-1}), L_\omega^*] \geq -C$
donc sur $\Omega^{n,q}(M,E)$ avec la même constante C.
Donc $\Delta_{\bar\partial} \geq kq - C$
Enfin, $\Omega^{n,q}(M,E) = \Omega^{0,q}(M, L^k \otimes L')$ car $\Lambda^{n,q} T^*M = K_M \otimes \Lambda^{0,q} \bar T^* M$ et $E = K_M^{-1} \otimes L^k \otimes L'$
et $\Delta_{\bar\partial}$ est le même.

Corollaire 1 : $H^{0,q}(M, L^k \otimes L') = 0$ lorsque $k > \frac{c}{q}$ et $q = 1, \dots, n$.

Remarque : le résultat s'étend avec L' un fibré holomorphe de rang quelconque.
En particulier, $H^{p,q}(\Omega, L^k \otimes L') = 0$ si k suf. grand et $q > 0$.
Donc, les seuls groupes qui subsistent sont ceux qui représentent des espaces de sections holomorphes : $H^{p,0}(L^k \otimes L') = \mathcal{O}(L^k \otimes L' \otimes \Lambda^p(\bar{T}^*\Omega)^{1,0})$.

Corollaire 2 : pour tout $u \in \Gamma(M, L^k \otimes L')$ dans l'orthogonal de $H^0(M, L^k \otimes L')$, on a : $\|u\|^2 \leq \frac{1}{k-c} \|\bar\partial u\|^2$.

Preuve : Notons $F = L^k \otimes L'$. Par le théorème de Hodge, on a :
$\Gamma(M, F) = H^0(M, F) \oplus^{\perp} \Delta_{\bar\partial} \Gamma(\Omega, F)$
Donc tout u dans l'orthogonal de $H^0(M, F)$ s'écrit $u = \Delta_{\bar\partial} w$.
Soit $v = \bar\partial w \in \Omega^{0,1}(\Omega, F)$ de sorte que $u = \bar\partial^* v$ et $\bar\partial v = 0$.
On veut montrer que $\|\bar\partial^* v\|^2 \leq \frac{1}{k-c} \|\bar\partial \bar\partial^* v\|^2$

D'après le théorème précédent, $(k-c)\|v\|^2 \leq \langle \Delta_{\bar\partial} v, v \rangle = \|\bar\partial^* v\|^2$ $(*)$

On a $\|\bar\partial^* v\|^2 = \langle \Delta_{\bar\partial} v, v \rangle \leq \|\Delta_{\bar\partial} v\| \, \|v\|$ par Cauchy-Schwartz
$\leq \|\Delta_{\bar\partial} v\| \, \frac{\|\bar\partial^* v\|}{\sqrt{k-c}}$ d'après $(*)$

Si $\bar\partial^* v = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon on peut simplifier par $\|\bar\partial^* v\|$.
Il vient : $\|\bar\partial^* v\| \leq \frac{\|\Delta_{\bar\partial} v\|}{\sqrt{k-c}} = \frac{\|\bar\partial \bar\partial^* v\|}{\sqrt{k-c}}$ ok.