Sections pinchées

Soit $L \to \Pi$ fibré positif sur M compact.
On note π_k la projection orthogonale de $\Gamma(M, L^k)$ sur $H^0(M, L^k)$
Si $s \in \Gamma(\Pi, L^k)$, je note $|s|$ sa norme ponctuelle et $\|s\| = \left(\int_\Pi |s|^2 \mu\right)^{\frac{1}{2}}$
sa norme L^2. Ici $\mu = \frac{\omega^n}{n!}$ avec $\omega = i\Theta(L)$.
Même notation pour $|\bar\partial s|$ et $\|\bar\partial s\|$.

Théorème : Soit $(u_k \in \Gamma(\Pi, L^k), k \in \mathbb{N})$ qui vérifie $|\bar\partial u_k| \leq C e^{-k/C}$
pour $C > 0$. Alors $|\pi_k u_k - u_k| \leq C' e^{-k/C'}$ pour $C' > 0$

Pour la preuve, on rappelle que $\|v\|^2 \leq \frac{1}{k-c} \|\bar\partial v\|^2$, $\forall v \perp H^0(M, L^k)$

Proposition : pour tout fibré en droites holomorphe et hermitien $L \to M$, $\forall p \in M$
$\exists C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall s \in \Gamma(M, L^k)$, on ait :

$$|s(p)| \leq C\left(k^n \|s\| + k^{-1} \sup_M |\bar\partial s|\right)$$

Si Π est compacte, on peut choisir C qui ne dépend pas de p.

preuve 2 pages plus loin.

Preuve du Thm : $w_k = \pi_k u_k - u_k$ vérifie $|\bar\partial w_k| \leq C e^{-k/C}$ donc $\|\bar\partial w_k\| = O(e^{-k/C})$
Comme w_k orthogonal à $H^0(\Pi, L^k)$, il vient que $\|w_k\| = O(e^{-k/C})$:
On conclut avec la proposition.

Proposition : L est positif $\Leftrightarrow \forall p \in M$, $\exists$ σ repère holomorphe en p tel que $\varphi = -\ln h(\sigma,\sigma)$ admette un minimum local non dégénéré en p.

Preuve : $\Leftarrow$ $Q = \mathrm{Hess}_p \varphi$ est symétrique > 0. Donc $Q(x,\bar{x}) > 0$, $\forall X \in T^{1,0}_p M$ non nul
Mais si $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, $Q(x,\bar{x}) = \sum \xi_i \bar{\xi}_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(p) = \partial\bar{\partial}\varphi(X,\bar{X}) = \Theta(X,\bar{X})$
$\Rightarrow$ soit (z_i) coordonnées centrées en p et σ repère holomorphe en p. Alors
$\varphi = \varphi(p) + L_1(z) + L_2(z) + Q(z,\bar{z}) + \overline{L_1(z)} + \overline{L_2(z)} + O(3)$ en p
avec L_1 linéaire, L_2 quadratique.
si on remplace σ par $\sigma \exp(L_1 + L_2)$ on obtient $\varphi = \varphi(p) + Q(z,\bar{z}) + O(|z|^3)$
Donc p est un point critique de φ et par le calcul précédent, $Q(x,\bar{x}) = \Theta(X,\bar{X})$.

Donc pour tout $p \in M$, on a un repère holomorphe (U,σ) en p tel que
tel que $\varphi = -\ln |\sigma|^2$ s'annule en p et soit > 0 sur $U \setminus \{p\}$.
Soit $\rho \in C^\infty(M)$ tel que $\mathrm{supp}\,\rho \subset U$ et $\rho \equiv 1$ au voisinage de p.
Alors $\rho \sigma^k$ est une section de $\Gamma(M, L^k)$.

Fait : $\forall f \in \mathcal{O}(U)$, $s_k = \pi_k(f \rho \sigma^k)$ vérifie $|s_k - f\rho\sigma^k| \leq C e^{-k/C}$.
preuve : $\bar{\partial}(f\rho\sigma^k) = (\bar{\partial}\rho) f \sigma^k$. Comme
Comme $\bar{\partial}\rho = 0$ au voisinage de p, $\exists C_2$ tel que $|\sigma| \leq e^{-1/C_2}$ sur le support de $\bar{\partial}\rho$
Donc $|\bar{\partial}(f\rho\sigma^k)| \leq C_2 e^{-k/C_2}$.

Bilan : on a construit des sections holomorphes S_k.

Sommes nous bien sûr qu'elles ne sont pas nulles ?

Si $f(p) \neq 0$, c'est clair car $|S_k(p)| = 1 + O(e^{-k/C})$

on peut étendre ceci à un voisinage W de p tel que $\varphi < C^{-1}$ et $|fg| \geq \varepsilon > 0$ sur W. Alors $|S_k| \geqslant |fg\sigma^k| - |S_k - fg\sigma^k| \geqslant \varepsilon e^{-k/2C} - Ce^{-k/C}$

$$\geqslant e^{-k/2C}\left(\underbrace{\varepsilon - Ce^{-k/2C}}_{>0 \text{ si } k \text{ grand.}}\right)$$

Une autre façon de raisonner intéressante même lorsque $f(p) = 0$ et de choisir x tel que $d(x,p) \sim k^{-1/2}$.

Précisément, soit (z_i) système de coordonnées centrées en p.

Alors $f = P + O(|z|^{k+1})$ où P polynôme homogène de degré k

et $\varphi = \varphi_2 + O(|z|^3)$ avec φ_2 —— —— —— 2.

Et en négligeant tout ce qu'on peut il vient

$$|S_k(k^{-1/2} z)| = k^{-k/2} |P(z)| e^{-\varphi_2(z)} + O(k^{-\frac{k+1}{2}}).$$

Preuve de la proposition 2 pages plus haut :

rappelons la variante de la formule de Cauchy : pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$,

$\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (\zeta - z)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, \mu_2(\zeta)$. (vu en TD)

avec μ_2 la mesure de Lebesgue.

Soit $D(r) = \{|z| \leq r \;/\; z \in \mathbb{C}\}$.

Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ supportée dans $D(1)$ et égale à 1 sur $D(1/2)$.

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $D(1)$. pour tout $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, il vient :

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial b}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, \rho(\zeta)\, \frac{\mu_2(\zeta)}{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, \frac{\mu_2(\zeta)}{\zeta}$$

Donc $|f(0)| \leq C \sup_{D(2)} \left| \frac{\partial b}{\partial \bar{\zeta}} \right| + C \int_{D(2)} |f|\, \mu_2$ avec C indépendant de f

Par une récurrence (exercice) sur la dimension, il vient que pour tout f bien d'un voisinage de $\overline{D^n(2)}$, on a

$$|f(0)| \leq C \sup_{D^n(2),\, i=1,\dots,n} \left| \frac{\partial b}{\partial \bar{\zeta}_i} \right| + C \int_{D^n(2)} |f|\, \mu_n$$

Par Cauchy-Schwarz : $|f(0)| \leq C \sup_{D^n(2),\, i=1,\dots,n} \left| \frac{\partial b}{\partial \bar{\zeta}_i} \right| + C \left(\int_{D^n(2)} |f|^2\, \mu_n \right)^{1/2}$

On applique cette inégalité à $g(x_1, \dots, x_n) = f(rx_1, \dots, rx_n)$. Cela donne :

$$|f(0)| \leq C r \sup_{D^n(r),\, i} \left| \frac{\partial b}{\partial \bar{\zeta}_i} \right| + \frac{C}{r^n} \left(\int_{D^n(r)} |f|^2 \mu_n \right)^{1/2}$$

Pour appliquer ceci à notre variété, on identifie un voisinage U de p avec un voisinage de $\overline{D^n(2)}$ dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\sigma : U \to L$ un repère holomorphe, $\varphi = -\ln |\sigma|^2$.
Alors $s = f \sigma^k$ avec $f \in C^\infty(U)$ et $|s| = |f| e^{-k\varphi/2}$.

on a $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq C |u - v|$ donc si $v \in \overline{D^n\left(\frac{1}{k}\right)}$, on aura

$$-k\varphi(0) \leq -k\varphi(v) + k|\varphi(v) - \varphi(0)|$$
$$\leq -k\varphi(v) + kC \qquad \text{d'où } e^{-k\varphi(0)} \leq C e^{-k\varphi(v)}.$$

donc :

$$|s(0)| = |f(0)| e^{-k\varphi(0)/2} \leq \frac{C}{k} \sup_{D^n\left(\frac{1}{k}\right),\, i} \left| \frac{\partial b}{\partial \bar{\zeta}_i} \right| e^{-\frac{k\varphi}{2}} + C k^n \left(\int_{D^n\left(\frac{1}{k}\right)} |s|^2 e^{-k\varphi}\, \mu \right)^{1/2}$$