$L \to M$ fibré en droites holomorphe hermitien sur M compacte muni d'un élément de volume μ.

$H^0(M,L)$ a un produit scalaire $\int_M \langle s,t\rangle \mu$, on note $\|\ \|$ la norme associée

Lemme : $\dim H^0(M,L) = \int_M N(x)\, d\mu(x)$ où $N(x) = \sup_{\psi \in \mathcal{H}\setminus 0} \frac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|^2}$

Preuve : pour tout $x \in M$, soit $e_x : \mathcal{H} \to L_x$ l'évaluation en x, c'est-à-dire $e_x(\psi) = \psi(x)$. Alors $N_x = \|e_x\|^2$.

Explicitons e_x dans une bon (s_i) de $H^0(M,L)$.

On a pour tout $\psi \in \mathcal{H}$ que $\psi = \sum \langle \psi, s_i\rangle s_i$ donc

$e_x(\psi) = \sum \langle \psi, s_i\rangle s_i(x)$

Choisissons $\sigma(x) \in L_x$ non nul et écrivons $s_i(x) = f_i(x)\,\sigma(x)$ avec $f_i(x) \in \mathbb{C}$.

Alors $e_x(\psi) = \langle \psi, \sum \overline{f_i(x)}\, s_i \rangle\, \sigma(x)$.

Par le théorème de Riesz $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$, $\|e_x\| = \|\sum \overline{f_i(x)}\, s_i\|\ |\sigma(x)|$

Donc $N_x = \sum |f_i(x)|^2\ |\sigma(x)|^2 = \sum |s_i(x)|^2$

Enfin $\int |s_i(x)|^2 d\mu(x) = \|s_i\|^2 = 1$, donc $\int N_x\, d\mu(x) = \dim H^0(M,L)$.

Thm : si $L \to M$ est positif et $\mu = \frac{(i\omega(L))^{\wedge m}}{m!}$, alors $N_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^m (1 + O(k^{-1}))$

avec un O uniforme en x et N_k la fonction N du fibré L^k.

Corollaire : si L est positif, $\dim H^0(M,L^k) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^m \int_M \mu$.

Nous allons seulement montrer que $N_k(x) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n$ ce qui suffit pour en déduire le corollaire.

Pour l'estimation de $N_k(p)$, on introduit des coordonnées (z_i) centrées en p telle que $\omega(L) = \sum g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ avec $g_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}$.
Donc $\mu = \rho\, \mu_n$ avec $\rho \in C^\infty(U, \mathbb{R}_{>0})$ qui vaut 1 en p.
et $\mu_n = i^n\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$.
On choisit un repère holomorphe σ de L en p tel que $\varphi = -\ln|\sigma|^2$ vérifie
$\varphi(p) = 0$, $\varphi > 0$ sur $U \setminus \{p\}$, $\partial_{z_i}\varphi(p) = \partial_{z_i}\partial_{z_j}\varphi(p) = 0$
Alors $\partial\bar{\partial}\varphi = \omega(L)$ donne $\varphi = \sum |z_i|^2 + O(|z|^3)$

On se donne $\psi \in C^\infty(\Pi)$ qui vaut 1 au voisinage de p et est supportée dans U.
On définit s_k = projeté orthogonal de $\psi\sigma^k$ sur $H^0(M, L^k)$
On avait vu que $|s_k - \psi\sigma^k| = O(e^{-k/C})$.

Lemme : $\|s_k\|^2 \sim \left(\frac{2\pi}{k}\right)^n$.

Comme $N_k(x) \geq \frac{|s_k(p)|^2}{\|s_k\|^2} \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n$, on voit que
$\liminf \left(\frac{2\pi}{k}\right)^n N_k(x) \geq 1$.

Preuve du lemme : $\|s_k\|^2 = \int_U |\psi|^2 e^{-k\varphi} \mu + O(e^{-k/C})$.

on identifie U à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et on voit ψ comme une fonction de $\mathbb{C}^n$,

alors $\|s_k\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |\psi(x)|^2 e^{-k\varphi(x)} f(x)\, d\mu_n(x) + O(e^{-k/C})$

$= k^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} |\psi(k^{-1/2}y)|^2 e^{-k\varphi(k^{-1/2}y)} f(k^{-1/2}y)\, d\mu_n(y)$ $\quad y = k^{1/2}x$

en majorant $|\psi|$ et f par des constantes et $-\varphi(x) \le -|x|^2/C$, la quantité à intégrer est majorée par $Ce^{-|x|^2/C}$ qui ne dépend pas de k et est dans L^1

Par ailleurs, quand $k \to \infty$, l'intégrant converge vers $e^{-|y|^2}$.

(en effet, $k\varphi(k^{-1/2}y) = k\left(k^{-1}|y|^2 + k^{-3/2}O(|y|^3)\right) = |y|^2 + O(k^{-1})$)

Par convergence dominée, on conclut que

$$k^n \|s_k\|^2 \to \int e^{-|y|^2} d\mu_n(y) = (2\pi)^n.$$

Lemme : Soit $r>0$. Alors pour toute fonction holomorphe f définie sur un voisinage de $\overline{D}^n(r)$, on a $|f(0)|^2 \le \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \left(1-e^{-k\pi^2}\right)^{-n} \int_{\overline{D}^n(r)} |f(y)|^2 e^{-k|y|^2} dy$

Preuve : on a que $\int_{\overline{D}^n(r)} z^\alpha e^{-k|z|^2} d\mu_n(z) = 0 = \int_{\overline{D}^n(r)} \overline{z}^\alpha e^{-k|z|^2} d\mu_n(z)$ $\forall \alpha \neq 0$

Comme $|f|^2 = |f(0) + (f-f(0))|^2 = |f(0)|^2 + (f-f(0))\overline{f(0)} + (\overline{f}-\overline{f(0)})f(0) + |f-f(0)|^2$, il vient que

$$|f(0)|^2 \int_{\overline{D}^n(r)} e^{-k|y|^2} d\mu_n(y) \le \int_{\overline{D}^n(r)} |f(y)|^2 e^{-k|y|^2} d\mu_n(y)$$

Par conclure $\int_{\overline{D}^n(r)} e^{-k|y|^2} d\mu_n(y) = k^{-n} \int_{\overline{D}^n(r\sqrt{k})} e^{-|y|^2} d\mu_n(y) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^n \left(1-e^{-k\pi^2}\right)^n$.

Conséquence : $\overline{\lim}\ \left(\frac{2\pi}{k}\right)^n N_k(x) \leq 1$.

Preuve : si $\psi \in H^0(\Pi, L^k)$, $\psi = f\sigma^k$ avec f holomorphe sur U.

donc $|\psi(0)|^2 = |f(0)|^2$ et $\|\psi\|^2 \geq \int_{\bar{D}^n(r)} e^{-k\varphi} |f|^2 \, d\mu$

pour $r \leq r_0$ donné

$\varphi(y) = |y|^2 + O(|y|^3) \Rightarrow \varphi \leq |y|^2 + C r^3$ sur $\bar{D}^n(r)$

$\Rightarrow -|y|^2 \leq -\varphi + Cr^3$ sur $\bar{D}^n(r)$

$\rho = 1 + O(|y|) \Rightarrow 1 \leq \rho\,(1+Cr)$ sur $\bar{D}^n(r)$.

Donc $\int_{\bar{D}^n(r)} e^{-k|y|^2} |f|^2 d\mu_k(y) \leq (1+Cr)\, e^{-kCr^3} \int_{\bar{D}^n(r)} e^{-k\varphi} |f|^2 \, d\mu$

D'où $|\psi(0)|^2 \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n C(k,r) \|\psi\|^2$ avec $C(k,r) = (1+Cr)\, e^{-kCr^3} \left(1 - e^{-kr^2}\right)^{-n}$

On choisit $r_k = \frac{\ln k}{\sqrt{k}}$ de sorte que $C(k, \ln k/\sqrt{k}) \to 1$.