Différentielle des fonctions à valeurs complexes.

M une variété, $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. Alors la différentielle de f est la section de $T^*M \otimes \mathbb{C}$ donnée par $df = da + i\,db$ où $a, b \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sont la partie réelle et imaginaire de f.

On vérifie que : $d(f_1 f_2) = f_1\, df_2 + f_2\, df_1$, $\quad d\bar{f} = \overline{df}$

On a un accouplement : $C^\infty(M, T^*M \otimes \mathbb{C}) \times C^\infty(M, TM \otimes \mathbb{C}) \to C^\infty(M, \mathbb{C})$.

car : $T_p^*M \otimes \mathbb{C} = \mathrm{Ham}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{C}) = \mathrm{Ham}_{\mathbb{C}}(T_pM \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$

Et si Z est un champ de vecteurs complexe de partie réelle et imaginaire X et Y,

$Z.f = X.f + iY.f = (X.a - Y.b) + i\,(X.b + Y.a) = df(Z)$

$(U, x_1, \dots, x_n)$ système de coordonnés

Alors $(dx_1, \dots, dx_n)$ repère de T^*M sur U

On note $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ le repère dual de TM sur U.

Structure complexe de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.

Soient $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$,

$(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n)$ la base duale de $(\mathbb{R}^{2n})^*$

$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^{2n}$. Alors

Alors : $dx_i = \alpha_i$, $dy_i = \beta_i$, $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$, $\frac{\partial}{\partial y_i} = f_i$.

En identifiant $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, la multiplication par i nous donne une structure complexe $J_n \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$. Alors : $J e_i = f_i$, $J_n^t \alpha_i = -\beta_i$

Soient les coordonnées complexes $z_i = x_i + i y_i$.

Alors $dz_i = dx_i + i dy_i = \alpha_i + i \beta_i$, $d\bar{z}_i = dx_i - i dy_i = \alpha_i - i \beta_i$

$(dz_i, d\bar{z}_i, i = 1, \dots, n)$ est un repère de $(T^* \mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}$

Le repère dual de $(T\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}$ est $\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, i = 1, \dots, n\right)$ où

$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$.

Fonctions holomorphes :

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ où U ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Alors f est holomorphe $\Leftrightarrow$ $df = \sum_{i=1}^{n} g_i \, dz_i$ avec $g_i \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$.

Preuve : $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$

Plus généralement, on peut étendre la définition aux ouverts U d'un espace vectoriel E muni d'une structure complexe J :

$f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ est holomorphe $\Leftrightarrow \forall Z \in E^{0,1}, \quad Z.f = 0.$

$\Leftrightarrow \forall p \in U, \quad d_p f \in (E^*)^{1,0}$

$\Leftrightarrow \forall p \in U, \quad d_p f \circ J = i \, d_p f.$

$\Leftrightarrow \forall p \in U, \ \forall X \in E, \quad d_p f(JX) = i \, d_p f(X).$

autrement dit $d_p f$ est $\mathbb{C}$-linéaire de (E, J) dans $\mathbb{C}$.

Applications holomorphes :

si E et F sont deux espaces vectoriels réels avec structures complexes J_E, J_F, U ouvert de E et $f : U \to F$ application linéaire, alors
f holomorphe $\Leftrightarrow_{\text{déf}} \forall p \in U$, $J_F \circ T_p f = T_p f \circ J_E$.

pour $F = \mathbb{C}^m$, cela revient à dire que les composantes de f sont des fonctions holomorphes. En effet, si l'on identifie E avec $\mathbb{C}^n$ et que l'on note $(z_1, \dots, z_n)$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ les coordonnées complexes de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ alors la matrice de $T_p f$ dans les bases $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}|_p\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1}|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial \sigma_m}|_{f(p)}, \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_1}|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_m}|_{f(p)}\right)$ est :

$$\begin{bmatrix} M_p & \bar{N}_p \\ N_p & \bar{M}_p \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad M_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p)\right), \quad N_p = \left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_j}(p)\right)$$

f holomorphe $\Leftrightarrow \forall p$, $N = 0 \Leftrightarrow \forall p$, $T_p f$ envoie $(\mathbb{R}^{2n})^{1,0}$ dans $(\mathbb{R}^{2m})^{1,0}$.

Remarque : si f est holomorphe, $\operatorname{rang} T_p f = 2 \operatorname{rang} M$
si de plus $n = m$, $\det(T_p f) = |\det M|^2 \geq 0$

Cohomologie de Dolbeault d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

Rappel : si U ouvert de E, $\Omega^k(U,\mathbb{R}) = C^\infty(U, \Lambda^k E^*)$ l'espace des formes différentielles réelles et $d : \Omega^k(U,\mathbb{R}) \to \Omega^{k+1}(U,\mathbb{R})$ la différentielle.

Alors : d = différentielle en degré 0.

$$d^2 = 0, \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$$

Introduisons $\Omega^k(U,\mathbb{C}) = C^\infty(U, \Lambda^k E^* \otimes \mathbb{C}) \simeq \Omega^k(U,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$.

La différentielle se prolonge en une application $\mathbb{C}$-linéaire $d : \Omega^k(U,\mathbb{C}) \to \Omega^{k+1}(U,\mathbb{C})$

Supposons $E = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure complexe naturelle.

Alors $\Lambda E^* \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} E^*$ avec $\Lambda^{p,q} E^* = \Lambda^p (E^*)^{1,0} \otimes \Lambda^q (E^*)^{0,1}$

Donc $\Omega^k(U,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(U)$.

où $\Omega^{p,q}(U) = C^\infty(U, \Lambda^{p,q} E^*) = \left\{ \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J \;\middle|\; f_{I,J} \in C^\infty(U) \right\}$

Lemme : Pour tout $\alpha \in \Omega^{p,q}(U)$, $d\alpha \in \Omega^{p+1,q}(U) + \Omega^{p,q+1}(U)$.

On note $\partial\alpha \in \Omega^{p+1,q}(U)$ et $\bar{\partial}\alpha \in \Omega^{p,q+1}(U)$ les composantes de $d\alpha$.

Preuve : $d(f\, dz_I \wedge d\bar{z}_J) = df \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$$= \sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J + \sum_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Cela nous définit $\partial : \Omega(U,\mathbb{C}) \to \Omega(U,\mathbb{C})$ et $\bar\partial : \Omega(U,\mathbb{C}) \to \Omega(U,\mathbb{C})$

Proposition : $\bar\partial$ est bien le conjugué de ∂, c'est-à-dire $\bar\partial \alpha = \overline{\partial \bar\alpha}$, $\forall \alpha \in \Omega(U,\mathbb{C})$

$\partial^2 = 0$, $\bar\partial^2 = 0$, $\partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$ et $\forall \alpha \in \Omega^k(U,\mathbb{C})$, $\forall \beta \in \Omega(U,\mathbb{C})$

$\partial(\alpha\wedge\beta) = (\partial\alpha)\wedge\beta + (-1)^k \alpha\wedge\partial\beta$, $\bar\partial(\alpha\wedge\beta) = (\bar\partial\alpha)\wedge\beta + (-1)^k \alpha\wedge\bar\partial\beta$

Preuve : d réel et $\overline{\Lambda^{p,q}} = \Lambda^{q,p}$.

$d^2 = 0$ et $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^k \alpha\wedge d\beta$.

Pour tout $p \in \{0,\dots,m\}$, on a un complexe différentiel :

$$0 \to \Omega^{p,0}(U) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{p,1}(U) \to \cdots \to \Omega^{p,m-1}(U) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{p,m}(U) \to 0$$

Les groupes de cohomologie s'appellent les groupes de cohomologie de Dolbeault et sont notés $H^{p,q}(U)$.