Variétés complexes.

M espace topologique.

Une carte (U,φ) de M à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est un ouvert U de M et une application $\varphi : U \to M$ qui est un homéomorphisme sur son image.

Un atlas holomorphe de M est la donnée de $n \in \mathbb{N}$ et d'une famille de carte $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telle que : $M \subset \bigcup U_i$ et $\forall\, i,j \in I$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est holomorphe.

Une variété complexe de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique séparé à base dénombrable muni d'un atlas holomorphe maximal de cartes à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

On appelle les cartes de cet atlas les cartes holomorphes de M

Exercice : tout atlas (holomorphe) est contenu dans un unique atlas maximal (hol.)

Exemple : $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ voir plus loin.

Prop : Toute variété complexe M de dimension n est en particulier une variété réelle de dimension 2n qui admet une orientation naturelle.

De plus M admet $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}\, TM)$ donnée en $p \in M$ par :

$J_p = (T_p\varphi)^{-1} \circ i \circ T_p\varphi$ pour toute carte (U,φ) holomorphe en p.

preuve : ...

Pour tout $p \in M$, J_p est une structure complexe de T_pM.
Soient $T_p^{1,0}M = \ker(J_p - i\mathrm{Id}) \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$ et $T_p^{0,1}M = \overline{T_p^{1,0}M}$

$(T_p^*M)^{1,0} = \ker(J_p^t - i\mathrm{Id}) \subset T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ et $(T_p^*M)^{0,1} = \overline{(T_p^*M)^{1,0}}$

M, N deux variétés complexes.
$f : M \to N$ une application lisse est dite holomorphe si $J \circ Tf = Tf \circ J$
De manière équivalente, l'application f lue dans toute carte holomorphe est holomorphe

Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f est holomorphe $\Leftrightarrow df(z) = 0 \quad \forall z \in T^{0,1}\Omega$
On note $\mathcal{O}(M)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de M. C'est un anneau.

Remarque : si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et M compacte, alors f est constante
(conséquence du principe du maximum).

Soit (U, φ) une carte holomorphe et $z_i : U \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ les coordonnées de φ. Alors $(U, z_1, \dots, z_n)$ s'appelle un système de coordonnées holomorphe
Le système de coordonnées réelles associé est $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ où $z_i = x_i + iy_i$.

Pour tout $p \in U$, les familles suivantes forment des bases :
$(d_p z_i)_{i=1,\dots,n}$ de $(T_p^*M)^{1,0}$, $(d_p \bar{z}_i)_{i=1,\dots,n}$ de $(T_p^*M)^{0,1}$
Les bases duales sont : $\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$, $i = 1, \dots, n$ de $T_p^{1,0}M$
$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \overline{\frac{\partial}{\partial z_i}}$, $i = 1, \dots, n$ de $T_p^{0,1}M$

Remarque sur les cartes : D'après le théorème d'inversion locale, si X est une variété et $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ est telle que $T_p\varphi : T_pX \to \mathbb{R}^n$ est inversible pour un certain $p \in X$, alors $\exists U$ voisinage ouvert de p tel que $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un difféomorphisme, autrement dit (U, φ) est une carte de M.
D'autre part, soit U, V deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme. Alors, φ holomorphe entraine que φ^{-1} est holomorphe.

Par conséquent, si $\varphi : \Pi \to \mathbb{C}^n$ holomorphe et $p \in \Pi$ tel que $T_p\varphi : T_pM \to \mathbb{R}^{2n}$ est inversible. Alors pour un certain voisinage U de p, (U, φ) est une carte holomorphe.

Autre formulation : Soit U un ouvert de M, $p \in M$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}(U)$ tels que $(d_p\varphi_1, \dots, d_p\varphi_n)$ soit une famille libre de l'espace vectoriel complexe $(T_p^*M)^{1,0}$
Alors quitte à restreindre U à un voisinage de p, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système de coordonnées complexes de Π
Preuve : on rappelle que $(T_p^*\Pi)^{1,0} = \{ l : T_p\Pi \to \mathbb{C} \mid l \circ J_p = il \}$
Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \to \mathbb{C}^n$, $T_p\varphi = (l_1, \dots, l_n)$ où $l_i = d_p\varphi_i$

Espace projectif complexe $\mathbb{P}^n = \{$ droites vectorielles de $\mathbb{C}^{n+1}\}$

si $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n$ la droite passant par z

$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ par l'application envoyant z sur $[z_0 : \cdots : z_n]$

On munit $\mathbb{P}^n$ de la topologie quotient. Il est séparé.

$U_i = \{ [z_0 : \cdots : z_n] / z_i \neq 0 \}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n$, l'application

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $[z_0 : \cdots : z_n] \longrightarrow \left(\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i} \right)$ est un homéomorphisme

Son inverse envoie $u \in \mathbb{C}^n$ sur $[u_0 : \cdots : u_{i-1} : 1 : u_i : \cdots : u_n]$

Les couples (U_i, φ_i) forment un atlas holomorphe.

En effet, si $i < j$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u) = \left(\frac{u_0}{u_j}, \cdots, \frac{u_{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u_i}{u_j}, \cdots, \widehat{\frac{u_j}{u_j}}, \cdots, \frac{u_n}{u_j} \right)$ qui est holomorphe.

interprétation : $U_i = \{$ droites intersectant l'hyperplan $\{z_i = 1\} \}$

$\forall x \in U_i$, $\varphi_i(x) =$ coordonnées de $x \cap \{z_i = 1\}$.

Soit $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection canonique.

Alors π est holomorphe et pour toute variété complexe X et application $f : \mathbb{P}^n \to X$, f est holomorphe $\Leftrightarrow$ $f \circ \pi$ l'est

Ex : $\forall$ application linéaire $l : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, $U = \{ [z] / l(z) \neq 0 \}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n$ et $U \to H$, $[z] \to \frac{z}{l(z)}$ est un difféomorphisme où H est l'hyperplan $\{l = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.