Une sous-variété complexe M de dimension m d'une variété complexe N de dimension n est une partie M de N telle que $\forall p \in M$, $\exists$ une carte holomorphe (U,φ) de N telle que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{C}^m$

Prop: M est une variété complexe

Prop: $F : M \to \mathbb{C}^d$ holomorphe submersion au dessus de $\lambda \in \mathbb{C}^d$, i.e. $\forall p \in F^{-1}(\lambda)$ $T_pF : T_pM \to T_{F(p)}\mathbb{C}^d$ est surjective. Alors $F^{-1}(\lambda)$ est une sous-variété complexe

Preuve : Soit $p \in F^{-1}(\lambda)$, $(U, z_1, \dots, z_m)$ un système de coordonnées holom. en p
Par hypothèse, $d_p f_1, \dots, d_p f_d$ est une famille libre de $(T_p^* M)^{1,0}$
Quitte à permuter les z_i, $df_1, \dots, df_d, dz_{d+1}, \dots, dz_m$ base en p de $(T_p^* \Pi)^{1,0}$
Quitte à réduire U, $(f_1, \dots, f_d, z_{d+1}, \dots, z_m)$ système de coordonnées holomorphes.

Prop: Soient $f_1, \dots, f_m$ des applications holomorphes de $\mathbb{C}^{m+1}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^m$ soit une submersion au dessus de 0. Alors $X = \{ [z] \in \mathbb{CP}^m \,/\, f(z) = 0 \}$ est une variété projective.

Preuve : Soit $j = 0, \dots, m$ et posons $g_j(u) = f_j(u_0, \dots, u_{j-1}, 1, u_{j+1}, \dots, u_m)$
On veut montrer que $Z_j = \{ u \,/\, g_1(u) = \dots = g_m(u) = 0 \}$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^m$.
L'application $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ est holomorphe, il suffit de montrer que c'est une submersion au dessus de 0. Par simplifier les notations, supposons $j = 0$.
Soit $u \in Z_0$, $v = (1, u)$, $T_u g(z) = T_v f(0, z)$.
Par ailleurs, si E champ d'Euler de $\mathbb{C}^{m+1}$, $E f_i = p_i f_i$.

Donc $E_{|v}$ si nul en v, donc $E_{|v} = (1, u)$ est dans le noyau de $T_v f$.
Comme $T_v f$ surjective, $\mathbb{C}^{n+1} = E_{|v}\mathbb{C} \oplus (\{0\} \times \mathbb{C}^n)$, $T_u g$ surjective.

Une sous-variété complexe $\mathbb{C}^n$ s'appelle une variété de Stein. Elle est nécessairement non compacte. Une sous-variété complexe de $\mathbb{CP}^n$ s'appelle une variété projective.
Pour la culture :

Théorème de Chow : toute variété projective est algébrique.

Rappel : $X \subset \mathbb{P}^n$ est algébrique si $\exists\, P_1, \dots, P_m$ polynômes homogènes de $\mathbb{C}^{n+1}$ tels que $X = \{ [z] \,/\, P_1(z) = \dots = P_m(z) = 0 \}$.

Théorème : Soit X une variété complexe et Y une sous-variété complexe.
Alors si codim $Y = 1$, toute fonction holomorphe de $X \setminus Y$ localement bornée est restriction d'une fonction holomorphe de X.
Si codim $Y \geq 2$, alors toute fonction holomorphe de $X \setminus Y$ est restriction d'une fonction holomorphe de X

Preuve vue en TD. Ici, $f \in \mathcal{O}(X \setminus Y)$ est dite localement bornée si pour tout compact K de X, f est bornée sur $K \setminus Y$.

Quotient par des actions de groupe.

X variété complexe, G groupe qui agit librement sur X par biholomorphismes. On suppose cette action proprement discontinue, c'est-à-dire que l'application $G \times X \to X \times X$, $g, x \to (gx, x)$ est propre si G est muni de la topologie discrète, autrement dit, pour toutes suites (x_n) et (g_n), telles que (x_n) et $(g_n x_n)$ convergent, (g_n) est stationnaire.

Alors sous ces hypothèse, X/G admet une unique structure de variété complexe telle que la projection canonique $X \to X/G$ soit un biholomorphisme local.

Preuve: il est classique que pour une action libre proprement discontinue, X/G est séparé et $\pi : X \to X/G$ est un homéomorphisme local. On définit alors les cartes holomorphes de X/G comme les inverses locaux de π. Les applications de changement de carte coïncident localement avec l'action des éléments de G, qui est holomorphe par hypothèse.

Exemple: ① Γ un réseau de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, alors $\mathbb{C}^n/\Gamma$ est complexe.

② Σ une courbe complexe compacte connexe de genre g ($H^1(\Sigma, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$)

Alors le théorème d'uniformisation nous dit que :

- $\Sigma \simeq \mathbb{CP}^1$ si $g=0$
- $\Sigma \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ si $g=1$ pour un certain réseau Γ
- $\Sigma = D/G$ si $g \geq 2$ où $D = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1 \}$ et G agit proprement discontinuement par transformation de Moebius $\left(z \to \frac{az+b}{cz+d} \right)$

③ Surface de Hopf, $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $0 < |\lambda| < 1$, $S = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{Z}$ agit par multiplication par λ^n

On verra plus tard que S n'est pas projective.