Fibrés vectoriels réels, complexes et holomorphes

M une variété. Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf : Un $\mathbb{k}$-fibré vectoriel de rang $r \in \mathbb{N}^*$ sur M est une variété E avec

i) une application lisse $\pi : E \to M$ surjective

ii) une structure de $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$

tel qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de M et pour tout i, un difféomorphisme $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{k}^r$ de la forme $\psi_i(u) = (\pi(u), \psi_{i,\pi(u)}(u))$ où pour tout $x \in U_i$, $\psi_{i,\pi(u)}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de E_x dans $\mathbb{k}^r$.

Remarque : $\forall i,j$, l'application $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{k}^r \to U_i \cap U_j \times \mathbb{k}^r$ est de la forme $(x, \xi) \to (x, g_{ij}(x)\,\xi)$ où $g_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j, Gl(r, \mathbb{k}))$

On a la relation de cocycle sur $U_i \cap U_j \cap U_k$: $g_{jk} \cdot g_{ij} = g_{ik}$.

Les (g_{ij}) s'appellent les matrices de transition.

Déf d'une section et on note $C^\infty(M, E)$ l'ensemble des sections de E, c'est un $C^\infty(M, \mathbb{k})$ module.

Si $s \in C^\infty(M, E)$, alors $\psi_i \circ s : U_i \to U_i \times \mathbb{k}^r$ est de la forme $x \to (x, \sigma_i(x))$ pour $\sigma_i \in C^\infty(U_i, \mathbb{k}^r)$. De plus, pour tout i,j, $\sigma_j = g_{ij} \cdot \sigma_i$ sur $U_i \cap U_j$.

réciproquement, une famille (σ_i) qui vérifie ces relations définit une section.

Déf: un repère local de E, c'est la donnée d'un ouvert U de M et de n sections (S_α) de $E \to U$ telles que $\forall x \in U$, $S_\alpha(x)$ est une base de E_x.
Se donner un repère (U, S_α) revient à se donner une trivialisation $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$, on passe de l'un à l'autre par $\psi(\sum_\alpha \lambda_\alpha S_\alpha(x)) = (x, \lambda)$.

Proposition: Soit $(E_x, x \in M)$ une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n.
Soit $E = \coprod_{x \in M} E_x$ et π l'application de E sur M qui envoie E_x sur x.
Soit (U_i) un recouvrement ouvert de M et pour tout i, une bijection $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{K}^n$ telle que $\forall x \in U_i$, $\psi(E_x) \subset \{x\} \times \mathbb{K}^n$ et $p_2 \circ \psi : E_x \to \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriel
Supposons que les applications $U_i \cap U_j \to Gl(n, \mathbb{K})$ associées soient lisses.
Alors $(\pi : E \to M)$ admet une unique structure de $\mathbb{K}$-fibré vectoriel telle que les ψ_i soient des difféomorphismes.

Preuve: mettre la topologie suivante sur E : U ouvert de $E \Leftrightarrow \psi_i(U)$ ouvert $\forall i$
vérifier que E est séparé à base dénombrable. Ensuite les couples $(\pi^{-1}(U_i), \psi_i)$ forment un atlas de E, ce qui en fait une variété.

Application 1: le tangent de M a une structure de fibré vectoriel réel de base M telle que : $\forall$ système de coordonnées $(U, x_1, \dots, x_m)$, les sections $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ sont un repère de $T\pi$ sur U.

Application 2 : tout construction canonique en algèbre linéaire se transpose dans le monde des fibrés.

a. Si E est un fibré vectoriel réel, $E \otimes \mathbb{C}$ est un fibré vectoriel complexe.

b. Si E et F sont des k-fibrés vectoriels de même base M, alors $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\Lambda^p E$, $S^p E$, $\mathrm{Hom}(E,F)$, E^* sont des k-fibré vectoriels de base M.

Application 3 : Si E est un k-fibré de base M et $f : N \to M$ une application lisse, alors $f^* E = \coprod_{x \in N} E_{f(x)}$ est un k-fibré de base N.

Application 4 : si $(U_i, i \in I)$ est un recouvrement ouvert de M, $(g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n),\ i,j \in I^2)$ est une famille d'applications lisses telle que : $\forall i,j,k$, $g_{ik} = g_{jk} \cdot g_{ij}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ alors il existe un fibré $E \to M$ de rang n admettant une famille de trivialisations $(\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times k^n,\ i \in I)$ avec pour matrices de transition les g_{ij}.

Sous-fibrés : Un sous-fibré vectoriel F de rang s d'un fibré vectoriel $E \to M$ est la donnée pour tout $x \in M$, d'un sous espace vectoriel F_x de E_x de dimension s vérifiant : $\forall p \in M$, $\exists U \ni p$ ouvert de M et $s_1, \dots, s_s \in C^\infty(U, E)$ tels que $\forall x \in U$, $(s_i(x))$ est une base de F_x

Prop : Un sous-fibré est lui-même un fibré vectoriel.
Si F est un sous-fibré de E, F/E est un fibré.

preuve : exercice.

Fibrés holomorphes: la définition est la même que pour les fibrés vectoriels complexes sauf que l'on remplace variété par variété complexe, application lisse par application holomorphe, difféomorphisme par biholomorphisme. Tout ce qui a été dit précédemment se transpose aux fibrés vectoriels holomorphes.

Remarquons qu'un fibré holomorphe est en particulier un fibré complexe, Si E est vectoriel holomorphe, on note $\mathcal{O}(M,E)$ l'ensemble des sections holom. de E, c'est un $\mathcal{O}(\Pi)$ module et $\mathcal{O}(M,E) \subset C^\infty(M,E)$.

Thm (Montel): soit $E \to \Pi$ un fibré holomorphe muni d'une métrique hermitienne. Soit (s_n) une suite de sections holomorphes localement bornée ($|s_n|$ est uniformément bornée sur tout compact K de Π). Alors (s_n) admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Π vers une section $s \in \mathcal{O}(\Pi,E)$.

Corollaire: pour tout fibré holomorphe $E \to \Pi$ sur une base Π compacte, $\mathcal{O}(\Pi,E)$ est de dimension finie.

Preuve du Thm pour $E = \Omega \times \mathbb{C}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{C}^n$ et métrique canonique.
soit K compact de Ω, $\varepsilon > 0$ tq $K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Alors par les inégalités de Cauchy on a $C > 0$ tq $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $|\partial_{z_i} f(x)| \leq C \sup_{K_\varepsilon} |f| \quad \forall x \in K$.
Donc localement bornée $\Rightarrow$ localement équicontinue, on peut appliquer Ascoli
Une limite (localement) uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe.

Fibré tangent holomorphe :

Préliminaire : soit $E \to M$ fibré vectoriel réel de rang $2n$ et $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}E)$ tel que $J^2(p) = -\mathrm{Id}_{E_p}$, $\forall p \in M$.
Alors $E \otimes \mathbb{C}$ admet deux sous-fibrés complexes, $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ dont les fibres en p sont resp. $\ker(J_p - i)$, $\ker(J_p + i)$.

Preuve : $\forall p \in M$, on cherche $\tau_1, \dots, \tau_n$ sections de $E \otimes \mathbb{C}$ définies sur un ouvert U de p avec $\forall q \in U$, $(\tau_i(q))$ base de $E^{1,0}_q$.
On part de (U, σ_α) repère de E sur $U \ni p$. On peut supposer que $J_p \sigma_\alpha(p) = \sigma_{\alpha+n}(p)$ $\forall \alpha = 1, \dots, n$.
On pose $\tau_\alpha = \sigma_\alpha - iJ\sigma_\alpha$. Quitte à restreindre U, c'est bon !

Si M est une variété complexe, on a vu que $\mathrm{End}(TM)$ admet une section J naturelle telle que $J^2 = -\mathrm{Id}$. On définit les sous-fibrés $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ de $TM \otimes \mathbb{C}$ par $T^{1,0}_x M = \ker(J_x - i\,\mathrm{Id} : T_x M \otimes \mathbb{C} \to \dots)$, $T^{0,1}_x M = \overline{T^{1,0}_x M}$
Si $(U, z_1, \dots, z_n)$ est un système de coordonnées complexes de M et $z_i = x_i + iy_i$, alors
$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$, $i = 1, \dots, n$ est un repère de $T^{1,0}M$
$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$, $i = 1, \dots, n$ ——— $T^{0,1}M$.

Soit $(U, z'_1, \dots, z'_n)$ un autre système de coordonnées complexe et $z'_i = \psi_i(z_1, \dots, z_n)$ alors $\frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_i g_{ij} \frac{\partial}{\partial z'_i}$ avec $g_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n)$ qui est holomorphe.

Conclusion : $T^{1,0}M$ admet une structure de fibré vectoriel holomorphe tel que $\forall$ syst. de coord. holomorphe $(U, z_1, \dots, z_n)$, les $\frac{\partial}{\partial z_i}$ forment un repère holomorphe sur U.

Rappelons que $\forall x \in M$, $id - iJ_x : T_xM \longrightarrow T_x^{1,0}M$ est un isomorphisme. De la sorte TM hérite d'une structure de fibré vectoriel holomorphe. En général, on travaillera plutôt avec $T^{1,0}M$ et on considérera TM comme un fibré vectoriel réel.

Conséquence : $(\overline{T}^*M)^{1,0}$ et $\Lambda^{p,0} T^*M$ sont des fibrés holomorphes tels que $\forall$ syst. de coord. hol. $(U, z_1, \dots, z_n)$, $(dz_i \,;\, i = 1, \dots, n)$ et $(dz_I \,;\, |I| = p)$ sont des repères holomorphes sur U.