Fibré en droites holomorphe.

Fait : pour toute variété complexe X, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droite holomorphes sur X forment un groupe abélien, appelé groupe de Picard. Le produit et l'inverse sont donnés par

$$[L_1] \cdot [L_2] = [L_1 \otimes L_2], \quad [L]^{-1} = [L^*].$$

On dit que L et L' sont isomorphes s'il existe $\varphi : L \to L'$ biholomorphe tel que $\forall p \in X$, φ se restreint en un isomorphisme d'espace vectoriel de L_p dans L'_p.

Le fibré canonique de X est $\det(T^{*1,0}X)^* = \Lambda^{n,0} T^*X$. Il est noté K_X.

Vun espace vectoriel, alors l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ admet un fibré en droites naturel dit fibré tautologique, dont l'espace total est $S = \{(x,z) \,/\, z \in x\} \subset \mathbb{P}(V) \times V$, la projection sur $\mathbb{P}(V)$ est $(x,z) \to x$.

Fait : S est un sous-fibré holomorphe de $\mathbb{P}(V) \times V$, et donc un fibré holomorphe.

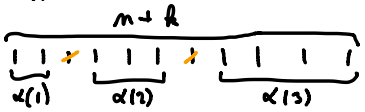
Preuve : $V = \mathbb{C}^{n+1}$, $U_i = \{[z] \,/\, z_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{P}(V)$ et on a une section $\sigma_i : U_i \to U_i \times V$ holomorphe donnée par $\sigma_i([z]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$ telle que $\forall x \in U_i$, $\sigma_i(x)$ engendre $S_{|x}$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$ le fibré en droite $S^{-k} \to \mathbb{P}(V)$.
On verra plus tard que le groupe de Picard de $\mathbb{P}(V)$ est $\mathbb{Z}$, un générateur étant S ou $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$.

Théo : $\forall k \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme naturel entre $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k))$ et l'espace des polynômes homogènes de degré k de V

Conséquence : $\dim H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \binom{k+n}{n} & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$
où $\dim V = n+1$.

En effet, la dimension est $\# \{ \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} / \ |\alpha| = k \}$



Pour $n = 1, 2, 3$ cela donne $k+1$, $\frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2)$,
$\frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{3.2} = \frac{1}{6}(k^3 + 6k^2 + 11k + 6)$

En général, la dimension $d_n(k)$ est un polynôme en k de degré n,
$d_n(k) = \frac{1}{n!} k^n + O(k^{n-1})$.

Preuve : • pour $k = 0$, l'isomorphisme en question est π^*, où π est la projection $V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$.

. on a un isomorphisme ℓ_k entre espace des sections (par ex. continues) de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$ et l'espace fonctions homogènes de degré k de $V\setminus\{0\}$

$\pi^*S \to V\setminus\{0\}$ est le sous-fibré de $(V\setminus\{0\})\times V$ d'espace total $\{(x,v)/v\in\mathbb{C}x\}$
Ce fibré admet pour repère la section $\sigma(x)=x$, qui est homogène de degré 1. Si τ est une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$, alors $\pi^*\tau$ est une section homogène de degré 0 de $(\pi^*S)^{-k} \to V\setminus\{0\}$, donc $\pi^*\tau = f\sigma^{-k}$ où $f : V\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ est homogène de degré k.

. τ section holomorphe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k) \iff f=\ell_k(\tau)$ est holomorphe.
plus clair d'utiliser des coordonnées $V=\mathbb{C}^{n+1}$.
$U_i = \{[z]\in\mathbb{P}^n / z_i\neq 0\}$ ouvert de $\mathbb{P}^n$, $\sigma_i : U_i \to S$ section qui envoie $[z]$ sur $\left(\frac{z_0}{z_i},\dots,\frac{z_n}{z_i}\right)$.
Si τ est holomorphe, $\tau = f_i\,\sigma_i^{-k}$ avec f_i holomorphe de $U_i\simeq\mathbb{C}^n$.
On a $z_i\pi^*\sigma_i = \sigma$ donc $\pi^*(f_i\sigma_i^{-k}) = (\pi^*f_i)\,z_i^k\,\sigma^{-k}$.
Donc $f(z) = z_i^k f_i\left(\frac{z_0}{z_i},\dots,\widehat{\frac{z_i}{z_i}},\dots,\frac{z_n}{z_i}\right)$, d'où le résultat.

. toute fonction holomorphe de $V\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{C}$ homogène est polynomiale.
prolongement à V par le théorème d'Hartogs
puis regarder la série de Taylor en 0

Sections holomorphes du tautologique restreint à une variété projective

Soit X sous-variété complexe de $\mathbb{P}(V)$ et $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\big|_X$.

Thm (admis) : si k est suffisamment grand, toute section holomorphe de $L^k \to X$ se prolonge en une section hol de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$.

Notons $\mathbb{C}_k[V] = \{ P : V \to \mathbb{C}$ polynomiale, homogène de degré $k \}$.

$W = \Pi^{-1}(X) \subset \mathbb{P}(V)$

Alors si k grand, $\mathcal{O}(X, L^k) \simeq \mathbb{C}_k[V] \,/\, \{ P \in \mathbb{C}_k[V] \,/\, P_{|W} = 0 \}$.

Autre résultat admis : $\dim \mathcal{O}(X, L^k) = c\, k^n + O(k^{n-1})$ avec $c > 0$, $n = \dim X$.