Variétés kählériennes

Algèbre linéaire. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une structure complexe J. Soit $\omega \in \Lambda^2 E^*$.

Fait : les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\omega(Jx, Jy) = \omega(x,y)$, $\forall x, y \in E$ ii) $\omega \in \Lambda^{1,1} E^*$

iii) $g(x,y) = \omega(x, Jy)$ est symétrique

iv) $h(x,y) = \omega(x,Jy) - i\omega(x,y)$ est sesquilinéaire.

Supposons qu'elles sont vérifiées. Alors g est définie positive ssi h est définie positive

Si cette dernière condition est aussi vérifiée, on dit que ω est positive.

Dans ce cas, ω est non dégénérée.

De plus, si $(e_1, \dots, e_m)$ est une base orthonormée pour h et $f_i = Je_i$ pour tout i, alors $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$ est une base orthonormée pour g et

$$\omega = \sum e_i^* \wedge f_i^* = i \sum u_i \wedge \bar{u}_i$$

où $(e_1^*, f_1^*, \dots, e_m^*, f_m^*)$ base duale de $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$ et $u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^* + i f_i^*)$

Remarquons aussi que $\forall$ triplets (E, ω, J) et (E', ω', J') comme ci-dessus, $\dim E = \dim E' \Rightarrow \exists\, Y : E \to E'$ bo qui envoie ω, J sur ω', J'.

On peut raconter la même histoire en partant de h ou g.

En effet, pour tout produit scalaire hermitien h de (E,J), $\omega = -\operatorname{Im} h$ est une forme positive de $\Lambda^{1,1} E^*$. De même, pour tout produit scalaire euclidien g de E tel que $g(Jx, Jy) = g(x,y)$, $\omega(x,y) = g(Jx, y)$ est dans $\Lambda^2 E^*$ et est positive.

Soit ω une forme positive de (E,J).

Soit $Gl(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E et les sous-groupes $Gl(E,J)$, $O(E,g)$, $Sp(E,\omega)$, $U(E,J,h)$ formé des éléments de $Gl(E)$ préservant J, g, ω et (J,h) respectivement.

Alors $\quad Gl(E,J) \cap Sp(E,\omega) = Gl(E,J) \cap O(E,g) = U(E,J,h)$.

Une autre façon de relier h et ω : soit φ l'isomorphisme de E dans $\bar{E}^{1,0}$ qui envoie X sur $\frac{1}{\sqrt{2}}(X - iJX)$. Alors $h(x,y) = \frac{1}{i}\omega(\varphi(x), \overline{\varphi(y)})$.

De la sorte, on voit que $\omega \in \Lambda^{1,1}\bar{E}^* \cap \Lambda^2 \bar{E}^*$ est positive si $\forall \xi \in E^{1,0}$, $\frac{1}{i}\omega(\xi,\bar{\xi}) \geq 0$ et $\omega(\xi,\bar{\xi}) = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

Si (u_i) base de $(E^*)^{1,0}$, $\quad \omega \in \Lambda^{1,1}\bar{E}^*$ s'écrit $\omega = i \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij}\, u_i \wedge \bar{u}_j$

elle est réelle $\Leftrightarrow \overline{h_{ij}} = h_{ji}$ et ω positive $\Leftrightarrow (h_{ij})$ déf positive.

En effet, $\forall \xi \in E^{1,0}$ de coordonnées $(u_i(\xi) = \xi_i)$, on a $\frac{1}{i}\omega(\xi,\bar{\xi}) = \sum_{i,j} \xi_i \overline{\xi_j}\, h_{ij}$.

Soit M une variété complexe.

On note $\Omega^{1,1}(M,\mathbb{R}) := \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M,\mathbb{R})$. Une forme $\omega \in \Omega^{1,1}(M,\mathbb{R})$ est dite positive si elle l'est en tout point, kählerienne si elle est positive et fermée.

D'après ce qui précède, se donner $\omega \in \Omega^{1,1}(M,\mathbb{R})$ positive revient à munir (TM, J) d'une métrique hermitienne, ou bien M d'une métrique riemannienne compatible avec J. Le fait que ω soit fermée équivaut à ce que J soit plat, dans le sens que la dérivée de Levi-Civita de J est nulle (admis).

M est dite kählerienne si elle est munie d'une forme de Kähler.

Exemple : $\mathbb{C}^n$ muni de $\omega = i \sum h_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$, où h_{jk} est une matrice hermitienne définie positive.

Les tores complexes $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sont aussi des variétés de Kähler. En effet la forme ω ci-dessus descend en une forme de Kähler.

Exemple : $\mathbb{P}^n$ est une variété de Kähler. Une forme de Kähler est ω_{FS} donnée par $\pi^* \omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)$ où π est la projection $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n$

Preuve : si une telle forme existe, alors pour toute section holomorphe s de $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^n$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{CP}^n$, $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ entraîne que.

$$\omega_{FS} = s^* \pi^* \omega_{FS} = s^* \left(\tfrac{1}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log(\cdots) \right) = \tfrac{1}{2\pi} \partial\bar{\partial}\, s^* \log(\cdots) = \tfrac{1}{2\pi} \partial\bar{\partial} \ln |s|^2$$

Une telle section s existe bien au voisinage de tout point :

pour $U = \{[z] / z_i \neq 0\}$, $s_i([z]) = \frac{1}{z_i}(z_0, \dots, z_n)$.

Donc ω_{FS} uniquement déterminé par l'équation précédente.

Vérifions que $\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \ln|s|^2$ est indépendant de s. Tout autre section s' de π définie sur le même ouvert U est de la forme $s' = fs$ avec $f \in \mathcal{O}(U)$

Donc $|s'|^2 = |f|^2|s|^2 \Rightarrow \log|s'|^2 = \log f + \log\bar f + \log|s|^2$.

$\Rightarrow \partial\bar\partial \log|s'|^2 = \partial\bar\partial \log|s|^2$.

ω est fermée car $d\,\partial\bar\partial = (\partial+\bar\partial)(\partial\bar\partial) = \partial^2\bar\partial - \bar\partial^2\partial = 0$.

ω réelle car $\overline{i\partial\bar\partial} = i\partial\bar\partial$

Pour montrer que ω est positive, on calcule avec la section s_i donnée ci-dessus.

Pour $i=0$, il vient

$$\partial\bar\partial \ln\left(1+|z_1|^2+\dots+|z_n|^2\right) = \partial\left(\frac{z_i\,d\bar z_i}{1+|z|^2}\right) = \frac{(1+|z|^2)\,dz_i\wedge d\bar z_i - (\bar z_i dz_i)\wedge(z_j\,d\bar z_j)}{(1+|z|^2)^2}$$

$$\frac{2\pi}{i}\omega\left(\xi,\bar\xi\right) = (1+|z|^2)^{-2}\left[(1+|z|^2)|\xi|^2 - (\bar z.\xi)(z.\bar\xi)\right] \quad \text{où } \xi = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

On $(\bar z.\xi)(z.\bar\xi) \le |\bar z.\xi|^2 \le |z|^2|\xi|^2$

Donc $\frac{2\pi}{i}\omega(\xi,\bar\xi) \ge (1+|z|^2)^{-2}|\xi|^2$.

Autre point de vue sur FS : soit (E,h) espace vectoriel complexe de dimension $n+1$ avec produit scalaire hermitien. Alors $\forall u \in E\setminus\{0\}$, $T_u\pi : T_uE = E \to T_{\pi(u)}\mathbb{P}(E)$ est surjective de noyau $\mathbb{C}u$, donc $T_{\pi(u)}\mathbb{P}(E) \simeq E/\mathbb{C}u \simeq (\mathbb{C}u)^{\perp_h}$

Fait : si $|u|=1$, alors le produit scalaire hermitien h_{FS} de $T_{\pi(u)}\mathbb{P}(E)$ associé à ω_{FS} coincide avec la restriction de h à $(\mathbb{C}u)^{\perp_h}$.

Preuve : exercice.

Prop: Toute sous-variété complexe d'une variété kählerienne est kählerienne. En particulier toute variété projective est kählerienne.

Preuve: si X sous-variété complexe de Y, alors (T_pX, J_p^X) est un sous-espace de (T_pY, J_p^Y), donc une métrique h^Y de (TY, J^Y) induit par restriction une métrique de (TX, J^X). De plus, les formes correspondantes $\omega_X = -\mathrm{Im}\, h^X$ et $\omega_Y = -\mathrm{Im}\, h^Y$ vérifient $\omega_X = j^* \omega_Y$ où j est l'injection de X dans Y donc ω_Y fermée $\Rightarrow \omega_X$ fermée.

Prop: Soit (M, ω) une variété kählerienne compacte de dimension complexe n. Alors pour tout $p = 0, \dots, n$, la classe de cohomologie de ω^p est non nulle, donc $H^{2p}(X, \mathbb{R}) \neq 0$.

Preuve: ω^n est un élément de volume donc $\int \omega^n \neq 0$ donc la classe de ω^n est non nulle d'après Stokes.

Exemple de variété non kählerienne: soit $\lambda \in]0,1[$ et $X_\lambda = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{Z}$ agit par multiplication par λ^n. Alors d'une part X_λ, comme quotient d'une variété complexe par un groupe agissant proprement, librement par biholomorphisme, est une variété complexe. D'autre part,

$X_\lambda \simeq (\mathbb{R}_{>0} \times S^3)/\mathbb{Z} \simeq S^1 \times S^3$ et donc par la formule de Künneth,

$H^2(X_\lambda, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i+j=2} H^i(S^1, \mathbb{R}) \otimes H^j(S^3, \mathbb{R}) = 0$.

Courbures et Fibrés positifs.

Déf/prop : soit $L \to M$ un fibré en droite holomorphe hermitien.
Alors la courbure $\Theta(L) \in \Omega^2(M, \mathbb{C})$ est la 2-forme donnée sur tout domaine U d'un repère holomorphe $\sigma : U \to L$ par $-\partial\bar\partial(\ln|\sigma|^2)$.
Elle est imaginaire pure : $\Theta(L) = -\overline{\Theta(L)}$, de bidegré $(1,1)$ et fermée.

Preuve : si $\sigma' = f\sigma$, $\ln|\sigma'|^2 = \ln|\sigma|^2 + \ln f + \ln \bar f \Rightarrow$ définition indépendante du choix de σ.
imaginaire pure car $\partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$, fermée car $d(\partial\bar\partial) = 0$.

Prop/exercice : $\Theta(\mathbb{C}_M) = 0$, $\Theta(L_1 \otimes L_2) = \Theta(L_1) + \Theta(L_2)$
$\Theta(L^{\otimes k}) = k\,\Theta(L)$.

Déf : $L \to M$ fibré en droite holomorphe hermitien est dit positif si $i\Theta(L)$ est positive.
$\Theta(L)$ étant fermée, $i\Theta(L)$ est alors une forme de Kähler.
Donc une variété admettant un fibré positif est kählerienne.

Exemples : ① Le fibré trivial de base $\mathbb{C}^n$ est positif. En effet, pour $\varphi = \sum |z_i|^2$, $i\partial\bar\partial\varphi = i\sum dz_i \wedge d\bar z_i$ qui est > 0.

② Le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ est positif. En effet, on munit $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ de la métrique canonique ; par restriction $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ hérite d'une métrique. Alors la courbure de la métrique correspondante de $\mathbb{P}^n$ est $\frac{2\pi}{i}\omega_{FS}$.

Preuve : σ section du tautologique $S \to \mathbb{P}^m$ au dessus d'un ouvert U de $\mathbb{P}^m$ est de la forme $\sigma(u) = (u, s(u))$ avec $s(u) \in u$. Donc se donner un repère σ revient à se donner s section de $\pi : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^m$. De plus $|\sigma|^2 = |s|^2$.
Donc $-\Theta(S) = \partial\bar{\partial} \ln |\sigma|^2 = \frac{2\pi}{i} \omega_{FS}$.

Remarque : si $L \to M$ est un fibré en droite holomorphe hermitien et $f : N \to M$ est holomorphe alors $f^* \Theta(L) = \Theta(f^* L)$.
Par conséquent, si L est positif et N est une sous-variété de M, alors $L_{|N}$ est positif
En particulier les variétés projectives admettent un fibré positif.

Théorème : si L est positif de base M compacte, alors
$\dim H^0(M, L^k) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^m \int_M \frac{(i\Theta(L))^m}{m!}$ lorsque $k \to \infty$

Preuve : si tout se passe bien, la dernière semaine !