1 Calcul différentiel

1.1 Enoncés

Exercice 1.1 (*Différentielle de l'inversion).* Soit $\mathrm{M}(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Montrer que le groupe $\mathrm{Gl}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathrm{M}(n)$. Pourquoi l'application inverse

$$\mathrm{Gl}(n) \to \mathrm{Gl}(n), \qquad A \to A^{-1}$$

est-elle de classe C^1 ? On note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne. Calculer la dérivée de l'application

$$t \to (\mathrm{id} + tE_{ij})^{-1}$$

en $t = 0$. En déduire la différentielle de l'application inverse en l'identité, puis en toute matrice inversible. Reprendre ce calcul en dérivant la relation $AA^{-1} = \mathrm{id}$.

Exercice 1.2. Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que c'est un difféomorphisme local sur le plan privé de l'origine. Déterminer un ouvert maximal U tel que la restriction de f à U soit un difféomorphisme global sur son image. Même question avec la fonction

$$g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

On pourra exprimer f et g en coordonnée complexe.

Exercice 1.3 (*Racines des polynômes).* Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Montrer que la partie U de $\mathbb{R}_n[X]$ formée des polynômes admettant n racines simples est un ouvert. Si $P \in U$, on note

$$\lambda_1(P) < \ldots < \lambda_n(P)$$

ses racines. Montrer que les fonctions $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1. On commencera par traiter les cas $n = 1, 2$. Pour le cas général on appliquera le théorème des fonctions implicites.

Exercice 1.4 (*Valeurs propres et vecteurs propres).* Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Soit $A_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et X_0 un vecteur propre de A_0 dont la valeur propre est une racine simple du polynôme caractéristique. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 et une application $X : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que pour $A \in V$, $X(A)$ est un vecteur propre de A et $X(A_0) = X_0$.

1.2 Corrections

Corrigé 1.1 (*Différentielle de l'inversion).* $\mathrm{Gl}(n)$ est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant qui est continue de $\mathrm{M}(n)$ dans $\mathbb{R}$. La continuité découle du fait que le déterminant est un pôlynome en les coefficients de la matrice.

Les coefficients de la matrice inverse de A sont des fractions rationnelles en les coefficients de A (penser à l'expression de A^{-1} à l'aide de la comatrice). Donc l'application inverse est de classe C^1 (même C^∞). Lorsque $i = j$, la matrice $\mathrm{id} + tE_{ij}$ est diagonale, on l'inverse explicitement et en dérivant en $t = 0$, on obtient $-E_{ij}$. Lorsque $i \neq j$, on a $(\mathrm{id} + tE_{ij})^{-1} = \mathrm{id} - tE_{ij}$, donc la dérivé en $t = 0$ est à nouveau $-E_{ij}$. Notons f l'application inverse de $\mathrm{Gl}(n)$ dans lui-même. Alors pour toute application $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathrm{Gl}(n)$, l'on a

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = d_{\gamma(0)} f\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t))\Big)$$

Par conséquent,

$$d_{\mathrm{id}} f(E_{ij}) = -E_{ij}$$

Comme les matrices E_{ij} forment une base de $\mathrm{M}(n)$, il vient $d_{\mathrm{id}} f(A) = -A$, pour toute matrice A.

Pour calculer la différentielle en $A \in \mathrm{Gl}(n)$, on se ramène à l'identité de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
f(A+H) =& (A+H)^{-1} = (A(\mathrm{id} + A^{-1}H))^{-1} \\
=& (\mathrm{id} + A^{-1}H)^{-1} A^{-1} = f(\mathrm{id} + A^{-1}H) A^{-1} \\
=& \big(f(\mathrm{id}) + d_{\mathrm{id}} f(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)\big) A^{-1} \\
=& (\mathrm{id} - A^{-1}H + o(\|A^{-1}H\|)\big) A^{-1} \\
=& f(A) - A^{-1}HA^{-1} + o(\|A^{-1}H\|) A^{-1}
\end{aligned}$$

Pour une norme matricielle $\|A^{-1}H\| \leqslant \|A^{-1}\|\|H\|$, donc $o(\|A^{-1}H\|)A^{-1} = o(\|H\|)$. De plus, $A^{-1}HA^{-1}$ dépend linéairement de H, donc

$$d_A f(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Une autre facon de faire ce calcul est de différentier la fonction g qui envoie A sur $A.f(A)$. Par Leibniz,

$$d_A(H) = H.f(A) + A d_A f(H)$$

Or cette différentielle est nulle car g est constante. On conclut immédiatement.

Corrigé 1.2. On calcule facilement la matrice jacobienne de f en (x, y), son déterminant est $4(x^2+y^2)$. Donc pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, la différentielle de f en (x, y) est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, la restriction de f à un voisinage ouvert de (x, y) est un difféomorphisme sur son image.

La restriction de f à $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine n'est pas un difféomorphisme sur son image, car $f(-x, -y) = f(x, y)$. Par contre la restriction de f au demi plan supérieur $U = \{(x, y)/y > 0\}$ est un difféomorphisme sur son image. Cela découle du théorème d'inversion locale et du fait que la restriction de f à U soit injective. De plus U est un ouvert maximal ayant cette proriété. En effet si V est un ouvert contenant strictement U, alors V contient un point de coordonnées (x, y) avec $y < 0$, mais alors $(-x, -y) \in U \subset V$, et donc la restriction de f à V n'est pas injective.

Corrigé 1.3 (*Racines des polynômes)***.** Considérons l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie (P, λ) sur $P(\lambda)$. Soit P_0 dans U. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on applique le théorème des fonctions implicites à l'application précédente en $(P_0, \lambda_k(P_0))$ (vérifier les hypothèses). Il nous vient un voisinage ouvert V_k de P_0 et une application $\alpha_k : V_k \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\alpha_k(P_0) = \lambda_k(P_0)$ et pour tout P dans V_k, $\alpha_k(P)$ est une racine de P.

Soit $\epsilon > 0$ tel que les intervalles $]\lambda_k(P_0) - \epsilon, \lambda_k(P_0) + \epsilon[$, $k = 1, \ldots, n$, soient deux à deux disjoints. Pour tout k, en restreignant V_k si nécessaire, on a que α_k prend ses valeurs dans $]\lambda_k(P_0) - \epsilon, \lambda_k(P_0) + \epsilon[$. Alors $V = \cap_{k=1}^n V_k$ est un voisinage ouvert de P_0. Et pour tout P dans V, les racines $\alpha_k(P)$ sont deux à deux distinctes. Autrement dit $V \subset U$. De plus, la restriction de l'application λ_k à V coincidant avec α_k, elle est de classe C^∞.

Corrigé 1.4 (*Valeurs propres et vecteurs propres)***.** En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'application de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie (A, λ) sur la valeur du polynôme caractéristique de A en λ, on obtient un voisinage V de A_0 et une application λ de classe C^∞ de V dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $A \in V$, $\lambda(A)$ est une valeur propre de A et $A_0 X_0 = \lambda(A_0) X_0$.

Soit F l'image de $A_0 - \lambda(A_0)\,\mathrm{Id}$. Quitte à restreindre V on peut supposer que pour tout A dans V, l'image de $A - \lambda(A)\,\mathrm{Id}$ est en somme directe avec la droite orthogonale de F (justifier ce point). Soit π_0 le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ d'image F. On a alors que pour tout A dans V le noyau de $\pi_o(A - \lambda(A))$ est l'espace propre $\ker(A - \lambda(A))$.

On considère alors l'application

$$V \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\, A_0 \times \mathbb{R}$$

qui envoie (A, X) sur $(\pi_0(A - \lambda(A))X, \|X\|^2)$. Quitte à restreindre V, on obtient par le théorème des fonctions implicites (vérifier les hypothèses),

une application $X : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que $X(A_0) = X_0$ et pour tout $A \in V$,

$$\pi_0(A - \lambda(A))X(A) = 0, \quad \|X(A_0)\| = \|X(A)\|.$$

On déduit alors de la condition sur l'image de $A - \lambda(A)\,\mathrm{Id}$ que $X(A)$ est vecteur propre de A.